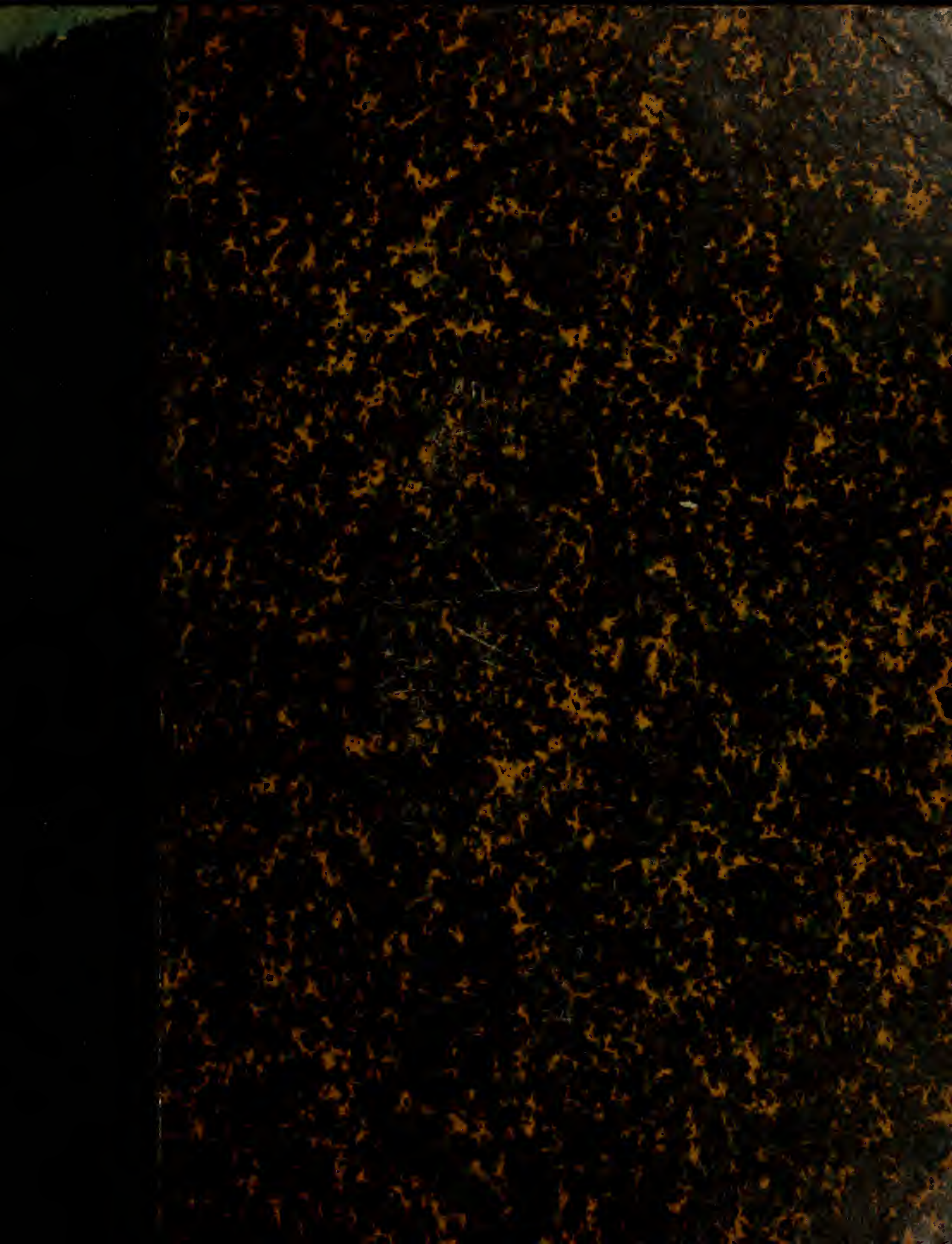
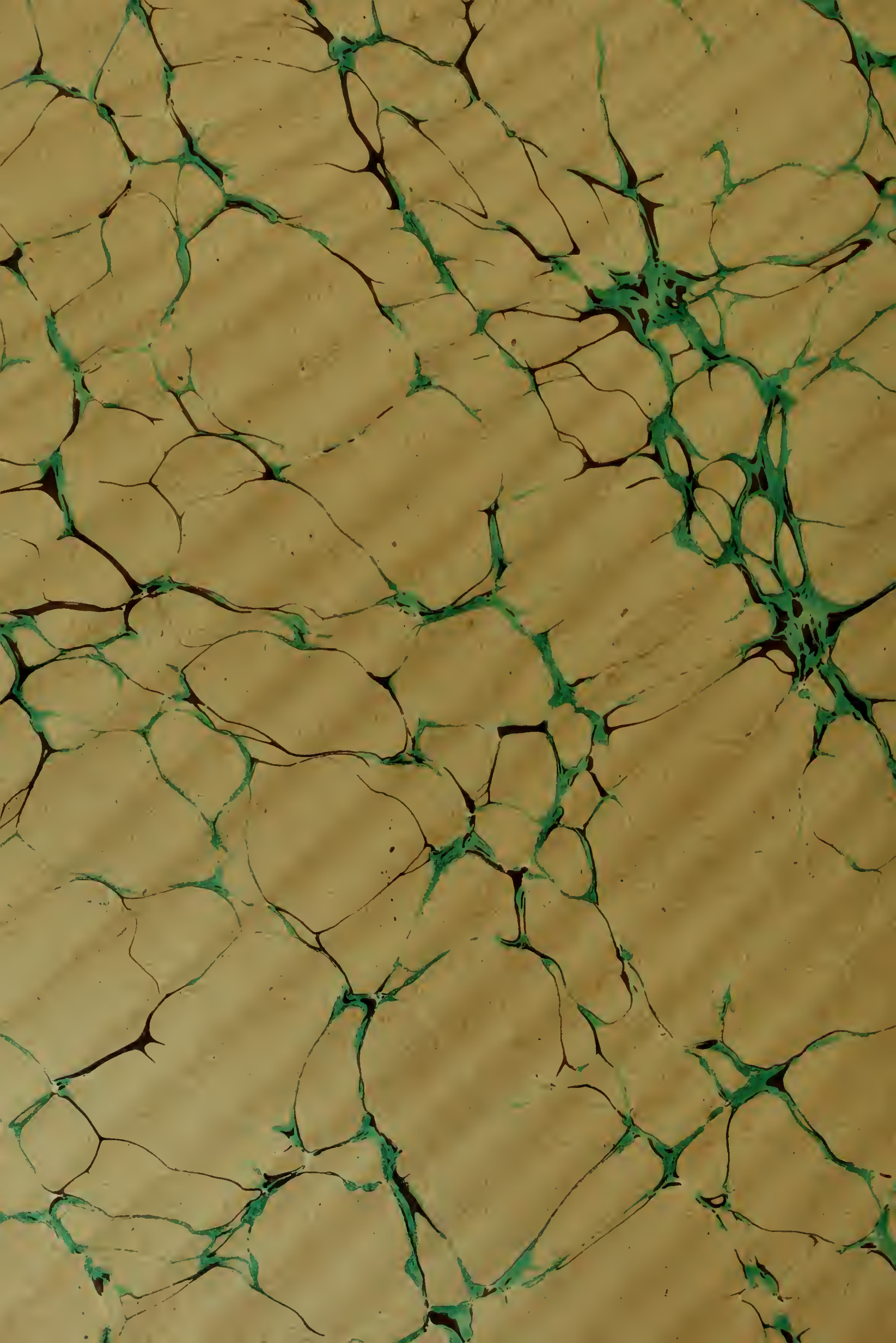
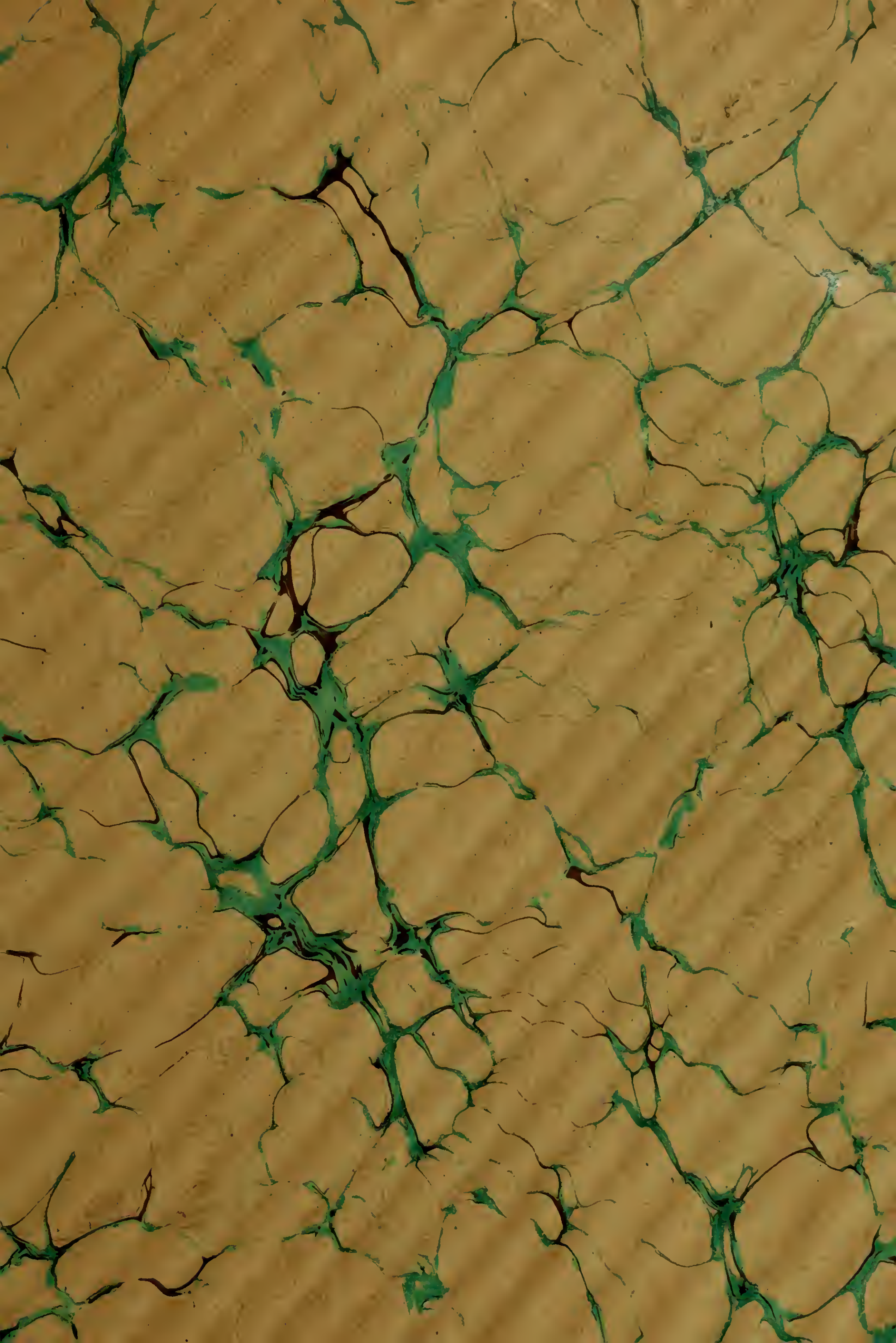






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HALPHEN, E. LAGUERRE, M. LÉVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. RESAL.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1885.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1885

M. Resal, après avoir dirigé pendant dix années le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* fondé en 1836 par M. Liouville, a manifesté l'intention arrêtée de se retirer, et nous a offert de prendre sa place à la direction.

Cette détermination de l'éminent géomètre sera vivement regrettée de tous ceux qui ont pu apprécier le zèle et le dévouement désintéressé qu'il n'a cessé d'apporter à l'œuvre qu'il avait entreprise. Mais nos objections ont dû s'arrêter devant sa volonté formelle.

Nous sommes toutefois heureux de faire connaître aux lecteurs du Journal que M. Resal ne cessera pas de prendre une part active à sa publication, et qu'il a consenti à faire partie du Comité de rédaction avec MM. Halphen, Laguerre, Maurice Lévy, Mannheim et Émile Picard.

Fort de cet appui et assuré d'ailleurs de la collaboration de plusieurs géomètres éminents, tant français qu'étrangers, nous avons cru pouvoir accepter la charge qui nous était offerte. Aussi longtemps que le bienveillant concours qui nous a été promis ne nous fera pas défaut, nous pourrons en effet maintenir au *Journal de Liouville* le rang élevé qu'il occupe dans les Sciences depuis un demi-siècle.

C. JORDAN.

Janvier 1885.

Le mode de publication par fascicules mensuels, suivi jusqu'à ce jour pour le Journal, a donné lieu à quelques critiques, les Mémoires les plus intéressants se

trouvant souvent morcelés par les hasards de l'impression. Nous pensons donc être agréable aux géomètres en nous rapprochant du système adopté par la plupart des journaux de Mathématiques étrangers.

En conséquence, chaque Volume du Journal sera partagé à l'avenir en quatre fascicules seulement, contenant ensemble 55 à 60 feuilles d'impression, et dont chacun formera un ensemble complet. Jusqu'à nouvel ordre, il paraîtra en moyenne un fascicule tous les trois mois.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions holomorphes;

Par M. HERMITE.

MM. Briot et Bouquet ont établi, d'une manière élégante, dans leur Ouvrage *Sur la théorie des fonctions elliptiques* (p. 203), cette proposition si importante, qu'une fonction holomorphe dont le module est fini pour toute valeur de la variable est une constante. Je me propose de démontrer le théorème plus général que toute fonction holomorphe $f(z)$, telle que le rapport $\frac{f(z)}{z^n}$, soit fini pour z infiniment grand, est un polynôme du degré n en z. A cet effet, je partirai de la formule de Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0) + J,$$

où l'on a

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{x^{n+1} f(z)\,dz}{z^{n+1}(z-x)},$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence de rayon r ayant son centre à l'origine, et qui contient à son intérieur le point dont l'affixe est la variable x.

J'emploierai ensuite cette expression qu'on obtient facilement de toute intégrale $\int F(z)\,dz$, effectuée le long d'une courbe de longueur σ, à savoir

$$\int F(z)\,dz = \lambda\sigma\,F(\zeta),$$

où ζ désigne l'affixe d'un point de la courbe, et λ le facteur de M. Darboux, dont le module a l'unité pour limite supérieure.

Nous pouvons ainsi écrire, en représentant par $\zeta = re^{i\theta}$ l'affixe d'un point de cette circonférence,

$$J = \frac{r x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - x)}\lambda.$$

Mettons maintenant $\zeta e^{-i\theta}$ au lieu de r, et il viendra

$$J = \frac{x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n}(\zeta - x)}\lambda e^{-i\theta}.$$

Cela étant, j'observe que, la fonction $f(z)$ étant holomorphe, on peut faire croître au delà de toute limite la circonférence qui sert de contour pour l'intégration. Par là nous voyons qu'en supposant, comme nous l'avons admis, que $\frac{f(z)}{z^n}$ reste une quantité finie, lorsque le module de z augmente indéfiniment, on trouve $J = 0$; la fonction considérée est donc bien un polynôme du degré n.

Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

INTRODUCTION.

Si, entre diverses solutions d'une même équation différentielle linéaire, solutions d'ailleurs inconnues, il existe une relation connue, quel profit peut-on en tirer pour l'intégration?

A cette question, d'un caractère si indéterminé, la réponse est que, *en général, on peut trouver explicitement, sans aucune intégration, les solutions qui figurent dans la relation donnée.* Effectivement, si l'on différentie continuellement cette relation, en abaissant les dérivées des inconnues au-dessous de l'ordre de l'équation différentielle, on parviendra à des relations en nombre suffisant pour déterminer ces inconnues par des équations simultanées. Ce raisonnement, tout élémentaire, ne suppose même pas que l'équation différentielle soit linéaire. Toutefois, quand il s'agit d'une équation linéaire, la conclusion se complète : *si la relation donnée a lieu entre des solutions en nombre égal à l'ordre de l'équation, cette équation s'intègre complètement.*

Ces généralités, on en conviendra sans peine, ne sont guère instructives. Elles laissent dans l'obscurité les cas d'exception ; elles entraînent à des calculs impraticables, sauf pour des exemples faits exprès et dénués d'intérêt. La méthode désirable devra, au contraire, fournir

d'elle-même des exemples intéressants, et mettre en lumière les cas exceptionnels.

Pour ce but, je restreins la question au cas où la relation donnée est algébrique par rapport aux quantités inconnues.

Désignons, d'une manière générale, par la notation $\chi_p(y)$ un polynôme homogène, de degré p, *à coefficients constants*, formé avec diverses indéterminées y_1, y_2, ... Considérons ces indéterminées comme des solutions d'une équation différentielle linéaire donnée; et, les lettres λ représentant des fonctions de la variable indépendante, toutes connues, supposons donnée la relation

$$(1) \qquad \lambda_0\chi_{p_0}(y) + \lambda_1\chi_{p_1}(y) + \lambda_2\chi_{p_2}(y) + \ldots = \lambda.$$

Chacun des polynômes $\chi_p(y)$ satisfait à une équation différentielle linéaire que l'on peut former; c'est l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ des solutions de la proposée. La relation donnée peut donc être envisagée comme ayant lieu entre les solutions de diverses équations linéaires données. Sa forme linéaire rend aisée la discussion du résultat. En général, Y_0, Y_1, Y_2, ... étant des solutions inconnues de diverses équations linéaires données (sans second membre) toutes différentes, et ces solutions satisfaisant à la relation

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots = \lambda,$$

on pourra déterminer ces solutions en résolvant un système d'équations simultanées du premier degré, sauf le cas d'exception suivant : s'il existe un ou plusieurs systèmes de solutions Z_0, Z_1, Z_2, ... des mêmes équations respectivement, qui satisfassent à la relation

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots = 0;$$

alors les Y dépendront d'une équation différentielle linéaire, à second membre, dont l'ordre égalera le nombre des systèmes Z.

Appliquant ceci à l'équation (1), où chaque produit $\lambda\chi(y)$ est une quantité telle que Y, nous pouvons conclure de la sorte : Étant

donnée une relation algébrique entre les solutions inconnues d'une équation différentielle linéaire, on en déduira, en fonction de la variable indépendante, l'expression de polynômes entiers, homogènes et à coefficients constants, composés avec ces solutions. Ceci est dit sous réserve des cas exceptionnels, dont je parlerai plus loin.

Par ces considérations, le problème général, concernant les relations algébriques données entre les solutions inconnues, est ramené à ce cas particulier : *Intégrer une équation différentielle linéaire, quand on connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme entier, homogène, à coefficients constants, formé avec les solutions inconnues.*

C'est à ce problème qu'est consacré le présent Mémoire. J'y emploierai une méthode nouvelle fondée sur la considération des covariants des formes algébriques. Mais examinons ici ce qu'indique l'analyse générale, rappelée au début et fondée seulement sur l'élimination.

Soient n l'ordre de l'équation différentielle, p le degré du polynôme χ, et, en outre,

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

On donne l'expression explicite de χ en fonction de la variable indépendante; soit λ cette fonction. Les dérivations successives donnent

$$(2)\quad \chi = \lambda, \quad \sum_m y'_m \frac{\partial \chi}{\partial y_m} = \lambda', \quad \sum_m y''_m \frac{\partial \chi}{\partial y_m} + \sum_{m,l} y'_m y'_l \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_m \partial y_l} = \lambda'', \quad \ldots.$$

Les équations obtenues ainsi contiennent, dans leurs premiers membres, les polaires de χ, formées avec les $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Le nombre total de ces polaires, la forme χ y comprise, est N. Si l'on s'arrête à la dérivée d'ordre N, on a des équations en nombre $N+1$, qui permettent l'élimination de toutes ces polaires. Le résultat de l'élimination est ainsi une équation linéaire, d'ordre N, à laquelle doit satisfaire λ. C'est l'*équation aux puissances* $p^{\text{ièmes}}$. Par hypothèse, λ satisfait à cette équation.

Il est manifeste que toute dérivation ultérieure est dès lors superflue. Les équations résultant des $N-1$ premières dérivations sont seules à

considérer. Avec la proposée $\chi = \lambda$, on a, en tout, N équations. Si ν est le nombre des quantités y figurant dans χ, ces quantités, avec leurs dérivées, donnent $n\nu$ inconnues, qu'on pourra trouver par là si $n\nu$ ne dépasse pas N.

Prenons, pour ν, son maximum n. Le nombre n^2 n'est supérieur à N que si p est moindre que 3. Donc, en général, *la connaissance, en fonction de la variable indépendante, d'un polynôme $\chi(y)$, de degré au moins égal à 3, entraîne l'intégration complète de l'équation,* sauf d'abord le cas d'exception où ce polynôme ne contient pas autant d'indéterminées qu'il y a d'unités dans l'ordre de l'équation. En ce cas particulier, on trouve seulement pareil nombre de solutions. Mais, en outre, l'analyse précédente fait encore connaître un autre cas d'exception; c'est celui dans lequel les N — 1 premières dérivations conduisent à moins de N — 1 équations distinctes.

En ce cas, l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ s'abaisse à un ordre $N - k$, moindre que N, et il existe, entre les solutions de l'équation proposée, k relations homogènes, à coefficients constants, et du degré p. Le nombre des équations (2) est seulement $N - k$; mais il existe, en même temps, k systèmes d'équations analogues, où λ est réduit à zéro. On démontre très facilement que ces équations permettent de trouver les inconnues y, toutes les fois que les k polynômes, analogues à χ, ne sont pas les produits d'un même polynôme du second degré par d'autres polynômes. Ainsi, le degré de χ étant au moins égal à 3, voici le seul cas où l'on ne puisse trouver, par l'élimination, les solutions qui figurent dans χ : c'est le cas où l'expression de ce polynôme par la variable indépendante se réduit à zéro, où ce polynôme se décompose en facteurs dont l'un est du second degré, où enfin c'est ce dernier facteur qui est nul. Il s'agit, on le voit, d'une équation différentielle linéaire entre les solutions de laquelle existe une relation quadratique à coefficients constants, et sur laquelle, en définitive, on ne fournit aucun autre renseignement.

Cette exception se range dans le cas où le degré du polynôme χ est égal à 2, cas auquel la conclusion précédente ne peut s'appliquer. La connaissance d'une forme quadratique, composée avec les solutions, n'entraîne pas l'intégration. Elle conduit à faire connaître les solutions qui y figurent dans le cas seulement où ces solutions sont en nombre

au plus égal à $\frac{n+1}{2}$. Par exemple, pour une équation du troisième ordre, la connaissance du produit de deux solutions suffira pour faire trouver ces deux solutions, sauf encore le cas où trois solutions quelconques sont liées par une relation quadratique à coefficients constants, et dans lequel une quadrature sera nécessaire.

Pour les formes quadratiques, on le voit, le problème est d'une nature toute spéciale. J'ai rencontré, dans l'étude de ce problème particulier, de nombreux résultats que je crois dignes d'intérêt, mais que je me réserve de traiter à part dans un autre travail.

Revenons au problème où l'on donne la relation (1), contenant au moins deux polynômes χ distincts. Des considérations de même nature font reconnaître que les dérivations successives fournissent assez d'équations pour déterminer les inconnues. En résumé, étant donnée une relation algébrique entre diverses solutions d'une équation différentielle linéaire, l'élimination suffit à faire connaître ces solutions, sauf un cas d'exception unique : celui où la relation consiste en un polynôme du second degré, homogène, à coefficients constants, égalé à zéro.

Le Mémoire actuel est divisé en trois Parties contenant successivement la *Théorie générale*, les *Équations du second ordre*, les *Équations du troisième ordre*.

I. — THÉORIE GÉNÉRALE.

INTÉGRALES NON LINÉAIRES.

1. En même temps qu'une équation linéaire quelconque, j'aurai ici à considérer son *adjointe*. Rappelons succinctement, d'après Lagrange, ce que c'est que deux fonctions linéaires adjointes.

Les lettres g_0, g_1, ..., γ_0, γ_1, ... désignant des fonctions *données* de la variable indépendante x; y et η des fonctions *indéterminées* de cette

même variable, considérons les deux combinaisons linéaires

$$G(y) = g_0 y^{(n)} + n g_1 y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} g_2 y^{(n-2)} + \ldots + n g_{n-1} y' + g_n y,$$

$$\Gamma(\eta) = \gamma_0 \eta^{(n)} + n\gamma_1 \eta^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma_2 \eta^{(n-2)} + \ldots + n\gamma_{n-1} \eta' + \gamma_n \eta.$$

Ces deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ sont dites *adjointes* l'une de l'autre, s'il existe une troisième fonction $B(y, \eta)$, linéaire et homogène par rapport à $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ d'une part, par rapport aussi à $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ d'autre part, telle qu'on ait *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les deux fonctions y, η,

$$(3) \qquad \eta G(y) + (-1)^{n+1} y \Gamma(\eta) = B'(y, \eta).$$

Cette condition détermine complètement l'une des deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ quand on se donne l'autre arbitrairement. La liaison est exprimée par l'un ou l'autre des deux systèmes suivants, à volonté,

$$\begin{array}{ll}
\gamma_0 = g_0, & g_0 = \gamma_0, \\
\gamma_1 = -g_1 + g_0', & g_1 = -\gamma_1 + \gamma_0', \\
\gamma_2 = g_2 - 2g_1' + g_0'', & g_2 = \gamma_2 - 2\gamma_1' + \gamma_0'', \\
\gamma_3 = -g_3 + 3g_2' - 3g_1'' + g_0''', & g_3 = -\gamma_3 + 3\gamma_2' - 3\gamma_1'' + \gamma_0''', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

La loi de ces équations est manifeste, et elle peut se résumer encore ainsi :

$$\Gamma(\eta) = (g_0\eta)^{(n)} - n(g_1\eta)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}(g_2\eta)^{n-2} + \ldots + (-1)^n n(g_{n-1}\eta)' + (-1)^{n+1} g_n \eta,$$

$$G(y) = (\gamma_0 y)^{(n)} - n(\gamma_1 \eta)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}(\gamma_2 y)^{n-2} + \ldots + (-1)^n n(\gamma_{n-1}\eta)' + (-1)^{n+1}\gamma_n y.$$

Les deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ étant composées de la sorte, la relation (3) est vérifiée par une fonction B, qui, écrite sous l'une ou l'autre des formes

$$(4) \left\{ \begin{array}{l}
B = \beta_0 y^{(n-1)} - \beta_1 y^{(n-2)} + \beta_2 y^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n \beta_{n-2} y' + (-1)^{n+1} \beta_{n-1} y, \\
(-1)^{n-1} B = b_0 \eta^{(n-1)} - b_1 \eta^{(n-2)} + b_2 \eta^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n b_{n-2} \eta' + (-1)^{n+1} b_{n-1} \eta,
\end{array}\right.$$

a les coefficients suivants :

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\beta_0 &= g_0\eta,\\
\beta_1 &= (g_0\eta)' - ng_1\eta,\\
\beta_2 &= (g_0\eta)'' - n(g_1\eta)' + \frac{n(n-1)}{1.2}g_2\eta,\\
\beta_3 &= (g_0\eta)''' - n(g_1\eta)'' + \frac{n(n-1)}{1.2}(g_2\eta)' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}g_3\eta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \gamma_0 y,\\
b_1 &= (\gamma_0 y)' - n\gamma_1 y,\\
b_2 &= (\gamma_0 y)'' - n(\gamma_1 y)' + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma_2 y,\\
b_3 &= (\gamma_0 y)''' - n(\gamma_1 y)'' + \frac{n(n-1)}{1.2}(\gamma_2 y)' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\gamma_3 y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si, au lieu de laisser η indéterminée, on remplace cette lettre par une solution particulière de l'équation $\Gamma(\eta) = 0$, il résulte de (3) que, en égalant B à une constante arbitraire, on obtient une intégrale première de l'équation $G(y) = 0$.

2. Supposons η remplacée successivement par n solutions, distinctes entre elles, de l'équation $\Gamma(\eta) = 0$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Soient abréviativement

$$B_1 = B(y, \eta_1),\quad B_2 = B(y, \eta_2),\quad \ldots,\quad B_n = B(y, \eta_n).$$

Prenons un polynôme, de degré quelconque, homogène, à coefficients constants, où les indéterminées soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$. En égalant à une constante arbitraire ce polynôme $\chi(B)$, on aura encore une intégrale première de l'équation $G(y) = 0$. Cette intégrale, on le voit, est homogène et du même degré par rapport à $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ que $\chi(B)$ par rapport aux lettres B. Les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. De telles intégrales ont déjà été envi-

sagées par M. Darboux dans un travail très remarquable ([1]) auquel j'emprunterai plus loin un résultat important.

Ce qu'il faut tout d'abord observer dans cette intégrale, que je désignerai par F, c'est la composition du coefficient de la plus haute puissance de $y^{(n-1)}$. D'après la première forme de B et l'expression de β_0, si p est le degré de F, le coefficient de $[y^{(n-1)}]^p$ est égal à $g_0^p\chi(\eta)$. Si donc, sans connaître d'ailleurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, on connaît l'expression en x d'un polynôme homogène, à coefficients constants et de degré p, où les indéterminées soient les solutions η de $\Gamma(\eta) = 0$, on connaîtra du même coup le premier coefficient d'une intégrale F, du même degré p, pour $G(y) = 0$.

Au moyen des formules (5), on peut reconnaître, et je montrerai d'ailleurs plus loin d'une autre manière et complètement, qu'en général, le premier coefficient de F étant connu, tous les autres s'en déduisent explicitement. Donc, quand on connaît l'expression en x d'un polynôme $\chi(\eta)$, on en conclut explicitement une intégrale première F pour l'équation $G(y) = 0$ Cette intégrale est du même degré en $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ que $\chi(\eta)$ en $\eta_1, \eta_2, \ldots$.

La fonction $\chi(\eta)$ sera dite la *source* de l'intégrale F.

3. Quels peuvent être les cas d'exception où la source ne détermine pas l'intégrale sans ambiguïté? En un tel cas, deux intégrales distinctes, d'un même degré p, auront une source commune. Leur différence sera donc une intégrale, de ce même degré p, ayant zéro pour source. Donc le seul cas d'exception est celui où, entre les solutions de $\Gamma(\eta) = 0$, il existe une ou plusieurs relations homogènes, à coefficients constants, et du degré p. Et manifestement, si k est le nombre des relations, linéairement distinctes entre elles, qui existent entre les η, les coefficients de l'intégrale F dépendent, quand la source est donnée, d'une équation différentielle linéaire de l'ordre k.

Cette exception n'a jamais lieu pour les équations du second ordre. C'est ce qu'on retrouvera tout à l'heure par un calcul direct.

4. Poursuivons, pour le moment, les considérations générales, et

([1]) *Sur les systèmes d'équations linéaires à une seule variable indépendante* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 524 et 596).

supposons connue une intégrale F, du degré p, ayant pour source $\chi(\eta)$.

Envisageons une *forme réduite* (ou canonique) de $\chi(\eta)$, obtenue par une substitution linéaire, les nouvelles indéterminées ζ étant données par des relations, telles que

$$\zeta_s = \alpha_{s,1}\eta_1 + \alpha_{s,2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{s,n}\eta_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit, avec ces indéterminées,

$$\chi(\eta) = A\zeta_1^{q_1}\zeta_2^{q_2}\ldots\zeta_n^{q_n} + A'\zeta_1^{q'_1}\zeta_2^{q'_2}\ldots\zeta_n^{q'_n} + \ldots = \Phi(\zeta).$$

Posons de même

$$(6) \qquad z_s = \alpha_{s,1}B_1 + \alpha_{s,2}B_2 + \ldots + \alpha_{s,n}B_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction $\chi(B)$ acquiert la forme réduite $\Phi(z)$. Les quantités z, combinaisons linéaires, à coefficients constants, formées avec les quantités B, sont encore des fonctions linéaires de $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$, à coefficients dépendant de x. La formule (6) est donc le symbole d'une substitution linéaire, concernant les lettres $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$, et qui fait acquérir à F la forme réduite $\Phi(z)$. Si cette forme réduite ne peut être obtenue que d'un nombre limité de manières ou, en d'autres termes, si elle est *déterminée*, on pourra la trouver, connaissant F, par des opérations purement algébriques. Ces opérations feront connaître les z, qui sont des intégrales premières de $G(y) = 0$. Si, en outre, la forme réduite contient n indéterminées, on aura n intégrales premières, et l'intégration sera complète.

Au lieu de prendre chaque intégrale z, retenons-y seulement le coefficient de $y^{(n-1)}$. Ce coefficient, pour z_s, est

$$g_0(\alpha_{s,1}\eta_1 + \alpha_{s,2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{s,n}\eta_n),$$

c'est-à-dire $g_0\eta$, où η est une solution de $\Gamma(\eta) = 0$. Donc chaque quantité z fournit immédiatement une solution de $\Gamma(\eta) = 0$. Par conséquent, nous pouvons conclure ainsi :

Si, en fonction de la variable indépendante, on connaît l'expression

d'un polynôme à coefficients constants, homogène et du degré p par rapport aux solutions d'une équation différentielle linéaire donnée, on peut trouver explicitement et sans intégration toutes ces solutions, pourvu qu'entre les solutions de la même équation différentielle il n'existe aucune relation homogène du degré p, et à coefficients constants.

A ce théorème fait exception le cas où le polynôme proposé n'est pas susceptible d'une forme réduite déterminée, ou, en d'autres termes, se reproduit par UNE INFINITÉ *de substitutions linéaires. Les polynômes du second degré sont compris dans ce cas d'exception.* En outre des polynômes du second degré, ces formes exceptionnelles constituent des catégories très restreintes, dont la recherche appartient à la pure Algèbre. Avec trois indéterminées, il n'existe que le type $z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3}$. Si le polynôme $\chi(\eta)$ appartient à ce type, il est aisé de reconnaître que les solutions η se trouveront par une quadrature. Des circonstances analogues ont lieu pour le cas d'un plus grand nombre d'indéterminées; mais je ne veux pas y insister. Quant à ce qui concerne les polynômes du second degré, j'ai dit dans l'introduction que je les exclus formellement ici.

Revenons à l'intégrale F, supposée susceptible d'une forme réduite déterminée $\Phi(z)$. Les quantités z sont des covariants linéaires, irrationnels de F, où $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ sont envisagées comme des indéterminées; du moins, si les z ne sont pas égaux respectivement aux covariants, ils leur sont proportionnels, c'est-à-dire que, un covariant linéaire canonique de F étant

$$Z = \mu y^{(n-1)} + \mu_1 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y' + \mu_n y,$$

la quantité z correspondante sera νZ, ν étant une fonction des coefficients, mais indépendante de $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, et la même pour tous les covariants linéaires.

Je préciserai ce fait plus loin, après avoir introduit la notion du *multiplicateur* qui correspond à chaque intégrale.

MULTIPLICATEURS.

5. Égalée à une constante arbitraire, une intégrale F est entièrement équivalente à l'équation $G(y) = 0$. Donc sa dérivée F' doit être divi-

sible par $G(y)$, et, puisque F' et G contiennent $y^{(n)}$ seulement à la première puissance, le quotient est un polynôme entier et homogène en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ comme F. Le degré de ce polynôme est inférieur d'une unité à celui de F. Ce polynôme M est le *multiplicateur* correspondant à l'intégrale F, de même que η est le multiplicateur correspondant à l'intégrale $B(y, \eta)$.

Le calcul direct peut prouver aussi l'existence et fournir l'expression de ce multiplicateur. Ayant, en effet, $F = \chi(B)$, où χ n'a que des coefficients constants, nous aurons F' au moyen de la relation (3),

$$B'(y, \eta_s) = B'_s = \eta_s G(y);$$

par conséquent,

$$F' = \sum_s B'_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s} = G(y) \sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}. \tag{7}$$

En considérant dans F séparément les lettres $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, et x qui figure dans les coefficients, et prenant à ce point de vue les dérivées partielles, on a, d'après l'expression (4) de B,

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = g_0 \sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}.$$

De là résulte, d'après (7), l'expression du multiplicateur M, d'ailleurs évidente,

$$g_0 M = \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}.$$

6. En second lieu, développant F' et remplaçant $G(y)$ par son expression explicite, on transforme (7) en la relation suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & g_0 \left[\frac{\partial F}{\partial x} + y^{(n-1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}} + y^{(n-2)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-3)}} + \ldots + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{\partial F}{\partial y}\right] \\ & \quad = \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \left[n g_1 y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} g_2 y^{(n-2)} + \ldots + n g_{n-1} y' + g_n y\right], \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette relation, dont les deux membres sont entiers et homogènes par rapport à $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$ et du même degré que F, se décompose en autant d'équations qu'il y a de coefficients dans F. Ces équations,

si l'on y considère les coefficients de F comme des inconnues, sont différentielles, linéaires et sans second membre. C'est de l'intégration d'un tel système que dépend la découverte d'une intégrale F.

Si l'on éliminait toutes les inconnues, sauf le coefficient de $[y^{(n-1)}]^p$, on obtiendrait une équation finale dont, comme on l'a vu, les solutions ont la forme $g_0^p\chi(\eta)$. C'est donc l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ de $\Gamma\left(\frac{\eta_1}{g_0}\right) = 0$.

Dans un pareil système, en général, toutes les inconnues s'expriment explicitement en fonction linéaire et homogène de l'une des inconnues et de ses dérivées. On a donc la confirmation du fait annoncé plus haut : tous les coefficients d'une intégrale de F s'expriment explicitement en fonction linéaire et homogène du premier coefficient et de ses dérivées.

Dans tout système d'équations linéaires, l'exception a lieu seulement si l'équation finale, par rapport à l'une des inconnues, est d'ordre inférieur à celui du système. Ici l'exception a lieu seulement quand l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ est d'ordre moindre que N (*Introd.*). Le calcul direct confirme bien les prévisions.

7. Appliquons cette analyse au cas le plus simple, celui où l'équation considérée est du second ordre. En ce cas, F est une forme *binaire*, aux indéterminées y', y,

$$F = a_0 y'^p + pa_1 y'^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{1.2} a_2 y'^{p-2} y^2 + \ldots + pa_{p-1} y' y^{p-1} + a_p y^p.$$

Le système qui se déduit de (8) est le suivant :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&g_0(a'_0 + pa_1) = 2pg_1 a_0,\\
&g_0[a'_1 + (p-1)a_2] = 2(p-1)g_1 a_1 + g_2 a_0,\\
&g_0[a'_2 + (p-2)a_3] = 2(p-2)g_1 a_2 + 2g_2 a_1,\\
&g_0[a'_3 + (p-3)a_4] = 2(p-3)g_1 a_3 + 3g_2 a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&g_0(a'_{p-1} + a_p) = 2g_1 a_{p-1} + (p-1)g_2 a_{p-2},\\
&g_0 a'_p = pg_2 a_{p-1}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent bien que le cas d'exception ne peut jamais se produire quand il s'agit d'équations du second ordre. Effectivement, si l'on donne une solution a_0, on peut déduire immédiatement a_1 de la première équation, puis a_2 de la seconde, etc.

On peut vérifier par ces équations le théorème sur les invariants et les covariants des intégrales, auquel j'ai fait allusion et qui sera démontré plus loin. Supposons d'abord p un nombre pair et considérons l'invariant quadratique de F,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & a_0 a_p - p a_1 a_{p-1} \\ & + \frac{p(p-1)}{1.2} a_2 a_{p-2} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2} \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{p}{2}} a_{\frac{p}{2}}^2. \end{aligned}$$

Sa dérivée peut s'écrire

$$\mathrm{I}' = a'_0 a_p - p a'_1 a_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} a'_2 a_{p-2} - \ldots + p a'_{p-1} a_1 + a'_p a_0.$$

En substituant les expressions de a'_0, a'_1, ..., a'_p tirées de (9), nous obtenons

$$g_0 \mathrm{I}' = 2 p g_1 \mathrm{I}.$$

Posant, pour abréger,

$$u = e^{-\int \frac{g_1}{g_0} dx}, \tag{10}$$

on voit que $u^{2p}\mathrm{I}$ est une constante. En d'autres termes, l'*invariant quadratique de la forme u^pF est une constante*. Plus généralement, soit J une fonction quelconque de a_0, a_1, ..., a_p; on aura, d'après les équations (9), cette expression de la dérivée J',

$$\mathrm{J}' = \left\{ \begin{aligned} & \frac{2g_1}{g_0}\left[p a_0 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_0} + (p-1) a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + (p-2) a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + \ldots\right] \\ & \quad + \frac{g_2}{g_0}\left[a_0 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_3} + \ldots\right] \\ & \quad - \left[p a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_0} + (p-1) a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + (p-2) a_3 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant J est invariant de F, on a, d'après les propriétés des in-

variants, la réduction suivante :

$$J' = 2m\frac{g_1}{g_0}J,$$

où m est le *poids* de cet invariant. D'ailleurs le double de ce poids est égal à p fois le degré de J par rapport aux lettres $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Donc *tout invariant de* u^pF *est une constante*.

Cette propriété du système (9) méritait d'être signalée : Quelles que soient g_0, g_1, g_2, *le système* (9), *dont l'ordre est* $(p+1)$, *a toujours* $(p-2)$ *intégrales qui sont fournies par les invariants de la forme binaire du degré* p. Le cas $p=2$ fait exception, bien entendu.

Pour vérifier de même la propriété des covariants, modifions les équations (9) en posant

$$u^p a_s = \alpha_s.$$

Le type général des équations (9) devient, à cause de (10),

(11) $$g_0[\alpha'_s + (p-s)\alpha_{s+1}] = (p-2s)g_1\alpha_s + sg_2\alpha_{s-1}.$$

Soit maintenant un covariant H de la forme u^pF,

$$H = A_0 y'^q + qA_1 y'^{q-1}y + \frac{q(q-1)}{1.2}A_2 y'^{q-2}y^2 + \ldots + qA_{q-1}y'y^{q-1} + A_q y^q.$$

Calculant, d'après (11), la dérivée d'un coefficient de H, nous aurons

$$g_0 A'_s = \left\{\begin{aligned} & g_1\left[p\alpha_0\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_0} + (p-2)\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + (p-4)\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2}\right] \\ & \quad + g_2\left(\alpha_0\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + 2\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2} + 3\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_3} + \ldots\right) \\ & \quad - \left[p\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_0} + (p-1)\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + (p-2)\alpha_3\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2} + \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

D'après les propriétés des covariants, cette équation se réduit à

$$g_0 A'_s = (q-2s)g_1 A_s + sg_2 A_{s-1} - (q-s)g_0 A_s.$$

Cette dernière ne diffère de (11) que par le changement des lettres p en q et α en A. Donc H est le produit d'une intégrale par u^q : *tout covariant de* u^pF, *du degré* q, *divisé par* u^q, *est une intégrale*.

8. On pourrait encore, et d'une manière analogue, prouver le même théorème pour les équations de tous les ordres, par le moyen du système que représente l'égalité (8); mais je préfère me borner à la démonstration simple et profonde qu'a donnée M. Darboux, auteur de ce beau théorème.

Nous avons composé F au moyen de $\chi(B)$. Cette dernière est une forme, à coefficients constants, et aux indéterminées $B_1, B_2, \ldots, B_n$, et nous avons posé

$$(12)\qquad B_1 = B(y, \eta_1), \quad B_2 = B(y, \eta_2), \quad \ldots, \quad B_n = B(y, \eta_n).$$

En regardant $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ comme les indéterminées dans la forme F, ainsi que nous l'avons fait jusqu'à présent, nous voyons que F est une transformée de $\chi(B)$ par une substitution linéaire (12), pour l'expression de laquelle on recourra à la formule (4). D'après les formules (5), le déterminant Δ de cette substitution est égal à g_0^n, multiplié par le déterminant composé avec $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ et les $(n-1)$ premières dérivées. Ce dernier a pour expression $e^{-n\int\frac{\gamma_1}{\gamma_2}dx}$, ce qui, d'après les relations entre les g et les γ, coïncide avec $g_0^{-n}e^{n\int\frac{g_1}{g_0}dx}$. Ainsi le déterminant de la substitution (12) est

$$\Delta = u^{-n}.$$

Désignons généralement par la lettre a les coefficients de F, par $\bar{a}$ ceux de χ. Soit maintenant un covariant de F, représenté par $U(a, y)$, la lettre y tenant ici la place de $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$. Si m est le poids de ce covariant, on aura identiquement, en vertu de la substitution (12),

$$U(a, y) = \Delta^m U(\bar{a}, B) = u^{-nm} U(\bar{a}, B).$$

Comme $U(\bar{a}, B)$ est une fonction à coefficients constants, formés avec des intégrales B, elle est elle-même une intégrale. Donc le covariant U, de la forme F, multiplié par u^{nm}, est une intégrale. Soit q le degré de U par rapport aux lettres $y^{n-1}, \ldots, y', y$, et soit r son degré

par rapport aux coefficients a; on a, comme on sait,

$$nm = pr + q.$$

Le même covariant, calculé pour la forme u^pF sera u^{pr}U. Donc :

Théorème I. — *Si* F *est une intégrale du degré p, tout covariant de u^p*F *du degré q, est égal au produit de u^q par une intégrale du degré q. La lettre u désigne la fonction*

$$u = e^{-\int \frac{g_1}{g_0} dx}.$$

*Tout invariant de u^p*F *est une constante.*

M. Darboux a étendu aussi cette proposition aux contrevariants. Pour exposer le nouveau théorème, envisageons les quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, définies par les relations (5), et mettons-y en évidence la quantité η en écrivant $\beta_0(\eta), \beta_1(\eta), \ldots, \beta_{n-1}(\eta)$. Si nous y remplaçons successivement η par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, nous aurons n^2 fonctions de x, par le moyen desquelles s'expriment linéairement toutes les quantités $\beta(\eta)$.

En effet, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ désignant des constantes, on a

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_n\eta_n,$$

et il en résulte

$$(13)\quad \beta_s(\eta) = c_1\beta_s(\eta_1) + c_2\beta_s(\eta_2) + \ldots + c_n\beta_s(\eta_n), \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Comparons cette substitution (13) à celle que nous avons envisagée précédemment

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} B_s = B(y, \eta_s) = {} & \beta_0(\eta_s)y^{(n-1)} - \beta_1(\eta_s)y^{(n-2)} \\ & + \beta_2(\eta_s)y^{(n-3)} + \ldots + (-1)^{n+1}\beta_{n-1}(\eta_s)y. \end{aligned} \right.$$

Ces deux substitutions sont les *transposées* l'une de l'autre, de telle sorte que si l'on considère $B_1, B_2, \ldots, B_n$ comme remplacés par $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$ suivant (14), en même temps $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont

remplacés par $\beta_0(\eta), -\beta_1(\eta), \beta_2(\eta), \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}(\eta)$ suivant l'inverse de la substitution (13), transposée de la précédente. Donc, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, d'une part, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$, de l'autre, considérées comme indéterminées *contragrédientes*, se remplacent en même temps par $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$ pour les premières, par $\beta_0(\eta), -\beta_1(\eta), \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}(\eta)$ pour les secondes. Soit donc $V(a, y, \beta)$ un contrevariant (si les y n'y entrent pas) ou un covariant mixte de F, du poids m; on aura

$$V(a, y, \beta) = \Delta^m V(\bar{a}, B, c) = u^{-nm} V(\bar{a}, B, c);$$

par conséquent, $u^{nm} V(a, y, \beta)$ est constant. C'est une intégrale du système des deux équations $G(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$. Il en résulte que : *tout covariant mixte de* $u^p F$, *formé avec les indéterminées contragrédientes* $\beta_0, -\beta_1, +\beta_2, \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}$ *qui correspondent, dans cet ordre, à* $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$; *du degré* q' *par rapport aux* β, *et du degré* q *par rapport aux* y, *est le produit de* $u^{q-q'}$ *par une intégrale du système* $G(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$.

9. Voici maintenant une autre proposition analogue, concernant les multiplicateurs. Nous avons trouvé (n° 5) pour le multiplicateur M, qui correspond à F, la double expression

$$M = \frac{1}{g_0} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = \sum_s \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}.$$

On peut passer de l'une à l'autre de ces expressions au moyen de la substitution (12), remplaçant les B par les y dans le polynôme $\sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}$, du degré $(p-1)$ par rapport aux B. Soient α les coefficients de M, exprimé par les y, et $\bar{\alpha}$ les coefficients dans la seconde forme. Prenons un invariant $W(\alpha)$ de M, nous aurons

$$W(\alpha) = \Delta^m W(\bar{\alpha}) = u^{-nm} W(\bar{\alpha}).$$

Ici $W(\bar{\alpha})$ n'est pas une constante; car les coefficients de $\sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}$ ne sont pas constants : ils sont linéaires et homogènes par rapport aux η.

Si donc W est du degré r par rapport aux coefficients α, $W(\bar{\alpha})$ est un polynôme homogène, et du degré r, par rapport aux η ; c'est la source d'un multiplicateur du degré $(r-1)$. Dans $u^p F$, le premier coefficient, celui de $(y^{(n-1)})^p$, est $u^p g_0^p \chi_p(\eta)$. C'est aussi, au facteur numérique près p, le premier coefficient, celui de $[y^{(n-1)}]^{p-1}$ dans $u^p g_0 M$. Si l'on calcule l'invariant W pour $u^p g_0 M$, on obtiendra le résultat précédent, multiplié par $u^{pr} g_0^r$. D'ailleurs, d'après les propriétés des invariants, $mn = (p-1)r$. L'invariant actuel aura donc la forme $u^r g_0^r \chi_r(\eta)$, puisque $W(\bar{\alpha})$ est un polynôme de la définition $\chi_r(\eta)$. Donc :

Théorème II. — M *étant un multiplicateur, du degré* $p-1$, *tout invariant de* $u^p g_0 M$, *du degré* r *par rapport aux coefficients est égal au premier coefficient de* $u^r F_1$, F_1 *étant une intégrale du degré* r. *C'est, en même temps, le premier coefficient de* $u^r g_0 M_1$, M_1 *étant un multiplicateur du degré* $(r-1)$.

10. Jusqu'à présent, nous avons considéré les multiplicateurs comme obtenus par les intégrales correspondantes. Les coefficients d'une intégrale F se déduisent de la source par le moyen des équations simultanées, qui sont représentées ensemble dans la relation (8). A des facteurs numériques près, les coefficients du multiplicateur reproduisent une partie des coefficients de l'intégrale, ceux qui contiennent $y^{(n-1)}$. Si donc on voulait déduire de la source seulement le multiplicateur, non l'intégrale, il faudrait éliminer d'abord un certain nombre d'inconnues. Cette opération, très simple pour le second ordre, et qui se fait entre les deux dernières équations (9), se complique déjà pour le troisième ordre. Comme ce sont précisément les complications de calcul que nous avons ici à éviter, et que, d'ailleurs, nous voulons opérer avec les multiplicateurs, il nous importe de savoir calculer directement leurs coefficients. Je vais en donner le moyen.

11. Soit un polynôme entier et homogène, composé avec y et ses dérivées, où l'on regarde y comme une fonction indéterminée de x. Les coefficients de ce polynôme U sont des fonctions données de x. Je dirai que U est irréductible si, dans chacun de ses termes, la dérivée de y, de l'ordre le plus élevé pour ce terme (y compris zéro), a un

exposant au moins égal à 2. Ainsi

$$U = Ay'^3 + Cyy'^2 + Dy^3$$

est irréductible; si l'on y ajoutait le terme Ey^2y', U ne serait pas irréductible.

Un polynôme, de la définition de U, c'est-à-dire entier et homogène par rapport à y et ses dérivées, est une *dérivée exacte* quand il existe un autre polynôme analogue V, du même degré et d'ordre inférieur d'une unité, tel qu'on ait $U = V'$, quelle que soit la fonction y.

La proposition suivante est presque évidente : *Un polynôme irréductible, qui est, en même temps, une dérivée exacte, est identiquement nul.* En effet, dans V' la dérivée de l'ordre le plus élevé n'entre que linéairement, ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de U.

Voici la seconde proposition sur le même sujet : *Tout polynôme entier et homogène* U *est réductible à la somme d'un polynôme entier, homogène, du même degré et irréductible, et d'une dérivée exacte.*

Pour le prouver, soit, dans un terme de U, ρ l'ordre le plus élevé des dérivées. Dans ce terme $y^{(\rho)}$ figure linéairement, sans quoi ce terme serait irréductible, par définition. Distinguons maintenant deux cas :

1° $y^{(\rho-1)}$ figure dans le même terme, que j'écris alors $a(y^{(\rho-1)})^m y^{(\rho)}$, et où la lettre a peut représenter le produit d'un coefficient par diverses autres dérivées de y, toutes d'ordre moindre que $(\rho - 1)$. L'égalité

$$a(y^{(\rho-1)})^m y^{(\rho)} = \frac{1}{m+1}\left[a(y^{(\rho-1)})^{m+1}\right]' - \frac{1}{m+1}a'(y^{(\rho-1)})^{m+1}$$

opère la réduction; car la dernière partie du second membre ne contient que des termes irréductibles.

2° $y^{(\rho-1)}$ ne figure pas dans le terme considéré, que j'écris alors $ay^{(\rho)}$. L'égalité

$$ay^{(\rho)} = (ay^{(\rho-1)})' - a'y^{(\rho-1)}$$

réduit le terme proposé à d'autres qui, contenus dans la dernière partie du second membre, sont d'ordre inférieur à ρ. En opérant ensuite sur chacun de ces derniers par l'un ou l'autre des deux procédés, on

opérera la réduction. Remarquons d'ailleurs que la première proposition entraîne cette conséquence : *la réduction ne peut s'effectuer que d'une seule manière*. Ainsi tout polynôme U peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme $U = V' + W$, où W est irréductible. Cette dernière partie W est la partie irréductible de U.

La conséquence finale est celle-ci : *Pour qu'un polynôme* U *soit une dérivée exacte, il faut et il suffit que sa partie irréductible n'existe pas.*

12. Revenons maintenant à une fonction linéaire $G(y)$, pour en chercher un multiplicateur M, entier, homogène, du degré $(p-1)$, par rapport à $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$. D'après la proposition précédente, *la condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit effectivement un multiplicateur consiste en ce que la partie irréductible du produit* MG *ait tous ses coefficients nuls.*

La seule observation qu'il y ait à ajouter porte sur le nombre des conditions ainsi trouvées : il faut, en effet, s'assurer que toutes ces conditions sont indépendantes, et qu'elles déterminent complètement le multiplicateur.

Pour composer une forme irréductible du degré p, on n'a qu'à augmenter d'une unité l'exposant de la dérivée la plus élevée figurant dans chaque terme d'une forme quelconque, du même ordre, et du degré $(p-1)$. Or MG est du degré p et ne contient $y^{(n)}$ que linéairement. Donc sa partie irréductible est d'ordre $(n-1)$ et contient juste autant de termes que M. On aura donc juste autant d'équations qu'il y a de coefficients dans M.

La suite de ce Mémoire présentera l'application de cette dernière théorie (III, n^{os} **30** et suivants).

II. — ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

13. Pour les équations du second ordre, le problème que nous traitons ici se pose en ces termes : *intégrer l'équation, quand on connaît le produit de plusieurs solutions*. Quand il s'agit de *deux* solutions,

le problème est réduit aux quadratures par une méthode des plus simples, et dont notamment M. Hermite a fait usage pour l'équation de Lamé. Je n'ai pas à rappeler ici cette méthode; on peut la remplacer par une autre, qui se rattache aux théories actuelles, et qui, bien entendu, mène aux mêmes calculs pour ce cas, mais qui s'applique aussi, quel que soit le nombre des solutions dont on connaît le produit.

L'équation proposée étant $\Gamma(\eta) = 0$, et le produit proposé $\chi(\eta)$ comprenant p racines, on forme, par le moyen des équations (9), l'intégrale F dont $\chi(\eta)$ est la source

$$F = a_0 y'^p + p a_1 y'^{p-1} y + \ldots + p a_{p-1} y' y^{p-1} + a_p y^p.$$

Supposons F décomposée en facteurs

$$F = a_0(y' - z_1 y)(y' - z_2 y)\ldots(y' - z_p y).$$

Chacun de ces facteurs est proportionnel à une intégrale linéaire $B(y, \eta_s)$. D'après l'expression (4) de B, on a donc

$$\frac{(g_0 \eta_s)' - 2 g_1 \eta_s}{g_0 \eta_s} = z_s.$$

Il en résulte, pour chaque racine z, une solution

$$\eta = \frac{1}{g_0} e^{\int\left(z + \frac{2g_1}{g_0}\right)dx}.$$

Donc, en tous les cas, le problème peut être résolu par des quadratures. Cette méthode s'applique quand il s'agit de *deux* solutions, et aussi quand il s'agit des cas singuliers relatifs à plus de deux solutions. Par exemple, si l'on donne le produit de quatre solutions sans avertir que ce produit est précisément le produit des carrés de deux solutions; alors, en appliquant la méthode générale dont il sera question tout à l'heure, on sera, par le calcul même, averti de cette circonstance, et il faudra recourir à la solution précédente. Mais, ces cas singuliers étant laissés de côté, toutes les fois que le produit considéré

est composé de *trois* solutions distinctes, au moins, *toute quadrature devient superflue*. En effet, la forme F admet alors des covariants linéaires, rationnels ou irrationnels, et ces covariants fournissent les solutions sans aucune intégration.

FORMES CUBIQUES.

14. Intégrer l'équation du second ordre

$$0 = \Gamma(\eta) = \gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + \gamma_2 \eta,$$

connaissant le produit $\varphi(x)$ de trois solutions.

Par les équations (9) nous déterminons a_1, a_2, a_3 coefficients de l'intégrale F du troisième degré, dont le premier coefficient est $a_0 = g_0^3 \varphi(x)$. Nous considérons ensuite la forme cubique

$$f = u^3 \mathrm{F}.$$

Prenons le covariant cubique Q et le discriminant R de F, et désignons en même temps par q, r les mêmes formes pour f. Nous aurons

$$q = u^9 \mathrm{Q}, \quad r = u^{12} \mathrm{R}.$$

Q et R étant pris, quant aux facteurs numériques, comme dans Clebsch (*Theorie der bin. alg. Formen*, p. 127), nous savons que

$$\left(q \pm f\sqrt{-\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = u^3\left(\mathrm{Q} \pm \mathrm{F}\sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

est un covariant linéaire. En le divisant par u, on a (n° **8**, th. I) une intégrale linéaire. En prenant ensuite le coefficient de y' et le divisant par g_0, on a une solution η de l'équation proposée. Pour avoir ce coefficient, il suffit de limiter Q et F chacun à leur premier terme. Prenant ces termes et écrivant explicitement R, remplaçant aussi u par son expression, nous avons

$$\eta = \frac{1}{\gamma_0^3} e^{\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0} dx} \Big(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$$
$$\pm a_0 \sqrt{a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_3 a_1^3 - 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3}\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Telle est la solution du problème : la formule donne deux solutions distinctes exprimées en fonction des quantités a_0, a_1, a_2, a_3, qui sont ainsi déterminées :

$$a_0 = \gamma_0^3 \varphi(x),$$
$$3a_1 = -a_0' + 6\frac{g_1}{\gamma_0}a_0, \qquad g_1 = -\gamma_1 + \gamma_0',$$
$$2a_2 = -a_1' + 4\frac{g_1}{\gamma_0}a_1 + \frac{g_2}{\gamma_0}a_0, \qquad g_2 = \gamma_2 - 2\gamma_1' + \gamma_0''.$$
$$a_3 = -a_2' + 2\frac{g_1}{\gamma_0}a_2 + 2\frac{g_2}{\gamma_0}a_1,$$

On ne manquera pas d'observer que la quantité soumise au radical du second degré, étant égale à l'invariant R, ne diffère pas de u^{12}. On a, par conséquent,

$$\frac{1}{\gamma_0^2}e^{2\int\frac{\gamma_1}{\gamma_0}dx} = \frac{1}{(a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_3a_1^3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3)^{\frac{1}{6}}},$$

en sorte que la quadrature qui subsiste est encore superflue, et que *la formule définitive, dégagée de toute quadrature, est*

$$(15) \qquad \eta = \frac{1}{\gamma_0}\left(a_0 \pm \frac{a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3}{\sqrt{a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_3a_1^3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Désignant par η_1 et par η_2 respectivement les solutions qui correspondent aux signes $+$ et $-$, on voit que les trois solutions dont le produit fait $\varphi(x)$ sont, au facteur numérique près $\sqrt[3]{2}$, les suivantes, où ω désigne une racine cubique primitive de l'unité : $\eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 + \omega\eta_2$, $\eta_1 + \omega^2\eta_2$. On a, en effet,

$$\tfrac{1}{2}(\eta_1^3 + \eta_2^3) = \frac{a_0}{\gamma_0^3} = \varphi(x).$$

Nous pouvons encore observer ici une application, soit du théorème I concernant les covariants des intégrales, soit du théorème II relatif aux invariants des multiplicateurs. Le covariant hessien de f a pour premier coefficient $u^6(a_0a_2 - a_1^2)$. Ce covariant étant du second

degré, il en résulte que $\frac{u^4}{g_0^2}(a_0a_2 - a_1^2)$ est le produit de *deux* solutions. On a la même conséquence en prenant le discriminant du multiplicateur. Cette conséquence se vérifie ainsi :

$$\eta_1\eta_2 = \frac{a_0a_2 - a_1^2}{\gamma_0^2}\left(\frac{4}{a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_3a_1^3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Application.

15. Appliquons ce résultat à l'équation numérique suivante, où ψ désigne un polynôme du second degré,

$$\psi\eta'' + \tfrac{3}{2}\psi'\eta' + \tfrac{4}{9}\psi''\eta = 0, \quad \psi = \psi_0x^2 + 2\psi_1x + \psi_2.$$

C'est, comme on voit, une équation hypergéométrique. Il s'agit de l'intégrer sachant qu'il y a trois solutions dont le produit est égal à $\frac{1}{\psi}$. Voici les calculs :

$$\gamma_0 = \psi, \quad \gamma_1 = \tfrac{3}{4}\psi', \quad \gamma_2 = \tfrac{4}{9}\psi'',$$
$$g_0 = \psi, \quad g_1 = \tfrac{1}{4}\psi', \quad g_2 = -\tfrac{1}{18}\psi'',$$
$$a_0 = \psi^2, \quad a_1 = -\tfrac{1}{6}\psi\psi', \quad a_2 = \tfrac{1}{18}\psi\psi'', \quad a_3 = -\tfrac{1}{108}\psi'\psi'',$$

et pour vérification $g_0a_3' = 3g_2a_2$.

$$a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3 = -2a_1(a_0a_2 - a_1^2),$$
$$a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_3a_1^3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3$$
$$= \frac{1}{a_0^2}(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)^2 + \frac{4}{a_0^2}(a_0a_2 - a_1^2)^3 = \frac{4a_2}{a_0}(a_0a_2 - a_1^2)^2.$$

La formule (15) se réduit à

$$\eta = \frac{1}{\gamma_0}\left(a_0 \pm a_1\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant et omettant un facteur constant, on a finalement

$$\eta = \psi^{-\frac{1}{2}}(\psi' \pm 2\sqrt{\psi_0\psi})^{\frac{1}{3}}.$$

On remarquera, dans cet exemple, que le produit des *deux* solutions η_1, η_2 fait aussi $\frac{1}{\psi}$, à un facteur constant près.

Formes biquadratiques.

16. Intégrer l'équation du second ordre $\Gamma(\eta) = 0$, connaissant le produit $\varphi(x)$ de quatre solutions.

Par les équations (9) nous déterminons a_1, a_2, a_3, a_4 coefficients de l'intégrale F du quatrième degré dont le premier coefficient est $a_0 = g_0^4 \varphi(x)$. Nous considérons ensuite la forme biquadratique f

$$f = u^4 \mathrm{F}.$$

Soient H, I, J le hessien et les deux invariants de F; h, i, j les mêmes formes pour f (avec les mêmes coefficients numériques que dans Clebsch, *Th. der Formen*, p. 146). On aura

$$h = u^8 \mathrm{H}, \quad i = u^8 \mathrm{I}, \quad j = u^{12} \mathrm{J}.$$

Soient ρ, ρ', ρ'' les racines de $\rho^3 - \frac{i}{2}\rho - \frac{j}{3} = 0$. D'après M. Cayley, on sait que les facteurs linéaires t de f se mettent ainsi sous la forme de covariants

$$t = \left[(\rho' - \rho'')\sqrt{h + \rho f} + (\rho'' - \rho)\sqrt{h + \rho' f} + (\rho - \rho')\sqrt{h + \rho'' f}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En opérant sur F, prenant les racines σ, σ', σ'' de

$$\sigma^3 - \frac{\mathrm{I}}{2}\sigma - \frac{\mathrm{J}}{3} = 0,$$

et posant

$$\mathrm{T} = \left[(\sigma' - \sigma'')\sqrt{\mathrm{H} + \sigma \mathrm{F}} + (\sigma'' - \sigma)\sqrt{\mathrm{H} + \sigma' \mathrm{F}} + (\sigma - \sigma')\sqrt{\mathrm{H} + \sigma'' \mathrm{F}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

on aura $t = u^4 \mathrm{T}$. Pour avoir une intégrale linéaire, il faut diviser t par $u g_0$. Donc, pour obtenir une solution η, il faut prendre le coefficient de y' dans $\frac{u^3 \mathrm{T}}{g_0}$.

Ici encore on remarque que la quantité u, à un facteur numérique

près, est égale à $I^{-\frac{1}{8}}$ ou $J^{-\frac{1}{12}}$, puisque i et j sont des constantes (th. I, n° **8**). Il n'y a donc aucune quadrature. Mettant pour le premier coefficient de H son expression explicite, nous avons le résultat suivant.

Solution. — *Ayant déterminé a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 par les équations suivantes :*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \gamma_0^4 \varphi(x), \\
4a_1 &= -a'_0 + \frac{8g_1}{\gamma_0} a_0 \\
3a_2 &= -a'_1 + \frac{6g_1}{\gamma_0} a_1 + \frac{g_2}{\gamma_0} a_0, \qquad g_1 = -\gamma_1 + \gamma'_0, \\
2a_3 &= -a'_2 + \frac{4g_1}{\gamma_0} a_2 + \frac{2g_2}{\gamma_0} a_1, \qquad g_2 = \gamma_2 - 2\gamma'_1 + \gamma''_0, \\
a_4 &= -a'_3 + \frac{2g_1}{\gamma_0} a_3 + \frac{3g_2}{\gamma_0} a_2, \\
0 &= -a'_4 + \frac{4g_2}{\gamma_0} a_3 \quad \text{(pour vérification)},
\end{aligned}
$$

et posé

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} I &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\
\tfrac{1}{6} J &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,
\end{aligned}
$$

on obtiendra quatre solutions η de l'équation proposée, par la formule

$$
(16) \quad \left\{
\begin{aligned}
\eta = \frac{1}{\gamma_0 J^{\frac{1}{4}}} \Big[&(\sigma' - \sigma'') \sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma a_0} \\
&\pm (\sigma'' - \sigma) \sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma' a_0} \\
&\pm (\sigma - \sigma') \sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma'' a_0} \Big]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\right.
$$

où les quantités σ, σ', σ'' sont les racines de l'équation

$$
(17) \qquad \sigma^3 - \tfrac{1}{2} I \sigma - \tfrac{1}{3} J = 0.
$$

Remarque. — *Le rapport* $J^2 : I^3$ *est une constante.*

On peut encore présenter la solution sous une autre forme en employant, au lieu des facteurs linéaires de F, ses covariants canoniques.

Voici alors le résultat : *σ étant une racine de l'équation* (17), *on obtient deux solutions η par l'équation*

$$(16\,bis)\left\{\begin{aligned} &\gamma_0^8 \mathrm{I}^4 \eta^8 + [2(3\mathrm{I}\sigma + 2\mathrm{J})(a_0 a_2 - a_1^2) - (\mathrm{I}\sigma + 2\mathrm{J})a_0\sigma]\gamma_0^4 \mathrm{I}^2 \eta^4 \\ &\qquad + \tfrac{1}{12}(\mathrm{I}\sigma - 2\mathrm{J})(3\mathrm{I}\sigma + 2\mathrm{J})[2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma a_0]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

17. *A posteriori*, la formule (16) peut être vérifiée; à cet effet, je vais prouver que, γ_0, a_0, a_1, a_2, J étant des fonctions de x à volonté, et I étant égal à $\mathrm{J}^{\frac{2}{3}}$, sauf un facteur constant, les quatre fonctions η données par la formule (16) satisfont à une même équation linéaire du second ordre, et que leur produit fait $\frac{a_0}{\gamma_0^4}$, à un facteur constant près.

Posons, pour abréger,

$$2(a_0 a_2 - a_1^2) = a_0 \xi;$$

$$\sigma' - \sigma'' = \alpha^2, \quad \sigma'' - \sigma = \beta^2, \quad \sigma - \sigma' = \gamma^2.$$

$$\sigma + \xi = a^2, \quad \sigma' + \xi = b^2, \quad \sigma'' + \xi = c^2;$$

d'où résulte

$$\alpha^2 = b^2 - c^2, \quad \beta^2 = c^2 - a^2, \quad \gamma^2 = a^2 - b^2.$$

L'une des quantités η données par (16) s'écrit ainsi

$$\eta_0 = \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{a_0}{\mathrm{J}}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} &a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 \\ &\quad = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

Nous obtenons successivement trois autres η en changeant successivement le signe de l'une des quantités a, b, c. De là

$$\frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} = \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = -\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{\beta^2\gamma^2}.$$

et, en précisant à volonté le signe de η_1 (i désignant maintenant $\sqrt{-1}$),

$$(17)\qquad \frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{(a+b)(a+c)}{i\beta\gamma}.$$

Semblablement,

$$\frac{\eta_2}{\eta_0} = \frac{(b+c)(b+a)}{i\gamma\alpha}, \quad \frac{\eta_3}{\eta_0} = \frac{(c+a)(c+b)}{i\alpha\beta}.$$

De là résulte

$$\frac{\eta_1\eta_2\eta_3}{\eta_0^3} = \frac{i\overline{(a+b)(b+c)(c+a)}^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \frac{i\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\overline{(a-b)(b-c)(c-a)}^2} = i\frac{a_0\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\gamma_0^4 J \eta_0^4},$$

$$(18)\qquad \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 = \frac{ia_0\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\gamma_0^4 J} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{I^3}{6J^2} - 1}\,\frac{a_0}{\gamma_0^4}.$$

Cette égalité, d'après la supposition que $J^2 : I^3$ est constant, prouve déjà que le produit des quantités η diffère de $\frac{a_0}{\gamma_0^4}$ seulement par un facteur constant.

L'égalité (17) peut s'écrire

$$i\beta\gamma\frac{\eta_1}{\eta_0} = a^2 + ab + bc + ca,$$

et les suivantes d'une manière analogue. En retranchant membre à membre les équations sous cette forme, on obtient

$$\alpha\eta_2 = \beta\eta_1 + i\gamma\eta_0,$$
$$\alpha\eta_3 = \gamma\eta_1 - i\beta\eta_0.$$

La constance du rapport $J^2 : I^3$ implique aussi la constance des rapports de σ, σ', σ'' entre elles. Donc α, β, γ ont des rapports constants. Donc les dernières relations indiquent que η_2 et η_3 sont fonctions linéaires, à coefficients constants, de η_0, η_1. Donc ces quatre quantités satisfont à une même équation linéaire du second ordre. La vérification est donc complète.

Pour achever, on peut encore donner explicitement, en fonction de

η_0 et η_1 par exemple, les solutions canoniques, celles que fourniraient l'équation (16 *bis*). A cet effet, il suffit de substituer, dans (18), les expressions de η_2 et η_3, puis de réduire la forme biquadratique à être bicarrée. Voici le résultat :

Si l'on pose

$$z_0 = \frac{1}{2}\left[-\frac{J(\beta+i\gamma)^2}{\alpha^4\beta^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{4}}(\eta_0+\eta_1),$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{J(\beta-i\gamma)^2}{\alpha^4\beta^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{4}}(\eta_0-\eta_1),$$

les deux quantités z_0, z_1 sont deux solutions de l'équation proposée (car les facteurs sont constants), et elles satisfont à la relation

$$(19) \qquad z_0^4 + z_1^4 + 2\frac{2\sigma-\sigma'-\sigma''}{\sigma''-\sigma'}z_0^2 z_1^2 = \frac{a_0}{\gamma_0^4} = \varphi(x).$$

18. Avant de faire une application numérique de ces résultats, je vais indiquer une légère modification qu'on peut apporter au calcul pour tous les cas où il s'agit d'une équation du second ordre.

Cette modification provient de ce fait bien connu que l'équation $G(y)=0$ se transforme en son adjointe $\Gamma(\eta)=0$ par la substitution $y=u^2g_0\eta$, de même que, dans les formes binaires, les contrevariants coïncident avec les covariants.

Faisons simultanément

$$u = e^{-\int\frac{g_1}{g_0}dx}, \quad v = e^{-\int\frac{\gamma_1}{\gamma_0}dx}, \quad uvg_0 = uv\gamma_0 = 1.$$

Donner $\chi_p(\eta)=\varphi(x)$ revient à donner $\chi_p(y)=v^{-2p}\gamma_0^{-p}\varphi(x)$. On peut donc calculer une intégrale $\mathfrak{F}$, de $\Gamma(\eta)=0$, avec la source $v^{-2p}\gamma_0^{-p}\varphi(x)$. Son premier coefficient sera $A_0=v^{-2p}\varphi(x)$. Au lieu de $\mathfrak{F}$, calculons directement $f_1=v^p\mathfrak{F}$; ce sera, d'après le théorème I, une forme à invariants constants. Dans un covariant linéaire de f_1, soit k_1 le coefficient de η'; alors $v^{-1}\gamma_0^{-1}k_1$ est une solution y; par suite, vk_1 est une solution η.

Nous avons déjà, au n° **7**, donné les équations qui déterminent les

coefficients de f_1. Elles ont pour type (11)

$$\gamma_0[\alpha'_s + (p-s)\alpha'_{s+1}] = (p-2s)\gamma_1\alpha_s + s\gamma_2\alpha_{s-1}.$$

Par cette méthode la solution du problème pour $p = 4$ se présente ainsi :

Ayant déterminé α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 par les équations

$$v = e^{-\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0}dx},$$

$$\alpha_0 = v^{-4}\varphi(x),$$

$$4\alpha_1 = -\alpha'_0 + \frac{4\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_0,$$

$$3\alpha_2 = -\alpha'_1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_0,$$

$$2\alpha_3 = -\alpha'_2 + \ldots\ldots + \frac{2\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_1,$$

$$\alpha_4 = -\alpha'_3 - \frac{2\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_3 + \frac{3\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_2,$$

$$0 = -\alpha'_4 - \frac{4\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_4 + \frac{4\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_3 \quad \text{(pour vérification)},$$

puis, ayant exprimé I, J, σ *par les* α, *comme on l'a fait plus haut par les quantités* a, *on aura la solution sous la forme*

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \eta = v\Big[&(\sigma' - \sigma'')\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + \sigma\alpha_0} \\ &\pm(\sigma'' - \sigma)\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + \sigma'\alpha_0} \\ &\pm(\sigma - \sigma')\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + \sigma''\alpha_0}\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités I *et* J *seront des constantes.*

Application. — Digression sur l'équation de Lamé.

19. *Intégrer l'équation suivante, où ψ désigne un polynôme du troisième degré,*

$$(21)\quad \psi\eta'' + \tfrac{1}{2}\psi'\eta' - \tfrac{1}{32}\psi''\eta = 0, \quad \psi = \psi_0 x^3 + 3\psi_1 x^2 + 3\psi_2 x + \psi_3,$$

sachant que quatre solutions ont un produit constant.

Voici les calculs :

$$\gamma_0 = \psi, \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\psi', \quad \gamma_2 = -\tfrac{1}{32}\psi'', \quad \rho = \psi^{-\frac{1}{4}}, \quad \varphi(x) = 1.$$

$$\alpha_0 = \psi, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2^5.3}\psi'', \quad \alpha_3 = \frac{1}{2^6.3}\psi''', \quad \alpha_4 = \frac{1}{2^{10}.3}\,\frac{3\psi''^2 - 8\psi'\psi'''}{\psi};$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{2^8.3}(\psi''^2 - 2\psi'\psi''') = \frac{3}{2^6}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2),$$

$$\frac{1}{6}J = \frac{1}{2^{12}.3^3}(3\psi'\psi''\psi''' - 3\psi\psi'''^2 - \psi''^3) = \frac{1}{2^{10}}(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3).$$

Si l'on fait $\sigma = \frac{1}{8}(\psi_0\tau + \psi_1)$, on trouve ici pour transformée de (17) l'équation $\psi(\tau) = 0$, en sorte que l'on a

$$\sigma' - \sigma'' = \tfrac{1}{8}\psi_0(\tau' - \tau''), \quad \ldots.$$

D'autre part,

$$2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + \sigma\alpha_0 = \tfrac{1}{8}\psi_0\psi(\tau - x).$$

De la sorte, en omettant un facteur constant $(\frac{1}{8}\psi_0)^{\frac{3}{4}}$, on a, d'après (20),

$$\eta = \left[(\tau' - \tau'')\sqrt{\tau - x} \pm (\tau'' - \tau)\sqrt{\tau' - x} \pm (\tau - \tau')\sqrt{\tau'' - x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule fournit quatre solutions de l'équation proposée; τ, τ', τ'' sont les racines de l'équation $\psi(\tau) = 0$.

Conformément au calcul fait plus haut, si l'on pose

$$\tau' - \tau'' = \alpha^2, \quad \tau'' - \tau = \beta^2, \quad \tau - \tau' = \gamma^2,$$
$$\tau - x = a^2, \quad \tau' - x = b^2, \quad \tau'' - x = c^2,$$

on peut écrire les solutions sous la forme

$$\eta_0 = \sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\eta_1 = \eta_0\frac{(a+b)(a+c)}{i\beta\gamma},$$

$$\eta_2 = \eta_0\frac{(b+c)(b+a)}{i\gamma\alpha},$$

$$\eta_3 = \eta_0\frac{(c+a)(c+b)}{i\alpha\beta},$$

et l'on a

$$\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 = i\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Les relations linéaires entre ces solutions et la forme canonique du produit s'écrivent exactement ici comme dans le cas général (n° **17**); il faut seulement mettre $\varphi(x) = 1$. Il y a encore pour ce produit une autre forme, valable aussi dans le cas général, mais qui, dans cet exemple, offre un intérêt particulier.

Si nous posons

$$\eta_0 = (-\psi_0)^{\frac{1}{4}}\alpha\beta\gamma\zeta_0,$$

$$\tau\eta_0 - i\beta\gamma\eta_1 = (-\psi_0)^{\frac{1}{4}}\alpha\beta\gamma\zeta_1;$$

l'expression du produit donne

$$\zeta_0(\zeta_1 - \tau\zeta_0)(\zeta_1 - \tau'\zeta_0)(\zeta_2 - \tau''\zeta_0) = 1$$

ou, en d'autres termes,

$$\zeta_0^4\psi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right) = 1.$$

Cette formule va servir de fondement à une transformation de l'équation (21) qui mérite d'être signalée.

20. Pour faire cette transformation, il nous est nécessaire de connaître la valeur exacte du déterminant $\zeta_0\zeta_1' - \zeta_1\zeta_0'$, qui, d'après l'équation proposée (21), ne diffère de $\psi^{-\frac{1}{2}}$ que par un facteur numérique. D'après les expressions de η_0 et η_1, on a

$$2\frac{\eta_0'}{\eta_0} = \frac{a'-b'}{a-b} + \frac{b'-c'}{b-c} + \frac{c'-a'}{c-a} = \frac{a+b+c}{2abc},$$

$$2\frac{\eta_1'}{\eta_1} = \frac{a-b-c}{2abc}.$$

De là résulte immédiatement, abc étant égal à $\sqrt{-\psi(x)}$,

$$\zeta_0\zeta_1' - \zeta_1\zeta_0' = \frac{1}{2\sqrt{\psi(x)}}.$$

Semblablement, les deux solutions qui font acquérir au produit la

forme canonique (19) donnent lieu au déterminant

$$z_0 z_1' - z_1 z_0' = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\psi_0(z'-z'')}{\psi(x)}}. \tag{22}$$

21. En désignant par L, M, λ, μ des constantes, envisageons les deux équations. à la même variable indépendante,

$$\psi\eta'' + \tfrac{1}{2}\psi'\eta' + (\mathrm{L}\psi'' + \lambda)\eta = 0,$$

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mathrm{M}\psi'' + \mu)y = 0.$$

La nouvelle inconnue y, bien entendu, est ici sans aucun lien avec celle que la même lettre a précédemment représentée.

Je me propose de transformer la seconde équation en prenant, pour variable indépendante, au lieu de x, le rapport

$$\xi = \frac{\eta_1}{\eta_0}$$

de deux solutions de la première.

D'après la première, on aura, h étant une constante,

$$\eta_1'\eta_0 - \eta_1\eta_0' = h\psi^{-\frac{1}{2}}.$$

De là résulte, pour la transformation,

$$\frac{d\xi}{dx} = h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-2},$$

$$y' = h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-2}\frac{dy}{d\xi},$$

$$y'' = h^2\psi^{-1}\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\left(\tfrac{1}{2}\eta_0\psi' + 2\eta_0'\psi\right)\frac{dy}{d\xi},$$

$$h^2\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{dy}{d\xi} + (\mathrm{M}\psi'' + \mu)y = 0.$$

La première équation peut être écrite d'une manière analogue. La supposant écrite et éliminant ψ'', j'ai

$$h^2\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{dy}{d\xi}$$
$$+\left[\frac{\mu\mathrm{L} - \lambda\mathrm{M}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\left(2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\xi} - h^2\eta_0^{-4}\frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)\right]y = 0.$$

Faisant maintenant disparaître η'_0 par le moyen de l'égalité

$$\eta'_0 = h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-2}\frac{d\eta_0}{d\xi}$$

et donnant à η la valeur particulière η_0, j'obtiens la forme

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\frac{d\eta_0}{\eta_0\,d\xi}\frac{dy}{d\xi} + \left\{\frac{\mu\mathrm{L} - \lambda\mathrm{M}}{h^2\mathrm{L}}\eta_0^4 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\left[2\left(\frac{d\eta_0}{\eta_0\,d\xi}\right)^2 - \frac{d^2\eta_0}{\eta_0^2\,d\xi^2}\right]\right\}y = 0.$$

La transformation est achevée, sauf à exprimer explicitement η_0 en fonction de ξ. Or c'est ce que nous savons faire si la première équation coïncide avec celle que nous avons étudiée tout à l'heure. Faisons cette supposition, c'est-à-dire

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{32}, \quad \lambda = 0.$$

Deux solutions quelconques η_0, η_1 donnent lieu à une forme biquadratique, égale à l'unité ; donc on a

$$\eta_0^4\chi\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) = 1,$$

où χ est un polynôme du quatrième degré. Donc

$$\eta_0 = \chi^{-\frac{1}{4}}(\xi).$$

Je changerai la notation de la constante M, en écrivant

$$\mathrm{M} = \frac{1 - 4m^2}{2^5 \cdot 3},$$

et aussi l'inconnue en prenant Y au lieu de y,

(23) $$y = \eta_0^{2m-1}\mathrm{Y} = \chi^{\frac{1-2m}{4}}\mathrm{Y}.$$

Le calcul n'offre plus aucune difficulté et donne pour résultat la transformée

(24) $$\chi\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\xi^2} - (m-1)\frac{d\chi}{d\xi}\frac{d\mathrm{Y}}{d\xi} + \left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{\mu}{h^2}\right]\mathrm{Y} = 0.$$

J'ai pris arbitrairement les solutions η_0 et η_1; si je les choisis et que, par exemple, mon choix se porte sur les solutions ζ_0, ζ_1 (n° **19**), alors χ se réduit au polynôme du troisième degré ψ lui-même. J'ai calculé (n° **20**) la constante h pour ce cas; elle est égale à $\frac{1}{2}$. En résumé, j'ai obtenu la transformation suivante :

$\psi(x)$ étant un polynôme du troisième degré dont les racines sont τ, τ', τ'', le changement de variables

$$(25)\quad \begin{aligned} \xi &= \tau - (\sqrt{\tau - x} + \sqrt{\tau' - x})(\sqrt{\tau - x} + \sqrt{\tau'' - x}),\\ y &= \left[(\sqrt{\tau - x} - \sqrt{\tau' - x})(\sqrt{\tau' - x} - \sqrt{\tau'' - x})(\sqrt{\tau'' - x} - \sqrt{\tau - x})\right]^{m-\frac{1}{2}} \mathrm{Y} \end{aligned}$$

transforme l'équation

$$(26)\qquad \psi(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2}\psi'(x)\frac{dy}{dx} + \left[\frac{1 - 4m^2}{2^5 . 3}\psi''(x) + \mu\right] y = 0$$

en cette autre

$$(27)\quad \psi(\xi)\frac{d^2 \mathrm{Y}}{d\xi^2} - (m - 1)\psi'(\xi)\frac{d\mathrm{Y}}{d\xi} + \left[\frac{(2m - 1)(m - 1)}{6}\psi''(x) + 4\mu\right]\mathrm{Y} = 0.$$

La signification de la relation liant ξ et x, au point de vue de la théorie des fonctions elliptiques, ne saurait échapper au lecteur. Si l'on suppose $\mu = 0$, $m = \frac{1}{2}$, y et Y se confondent; ces quantités sont égales, sauf des facteurs constants, aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$, $\int \frac{d\xi}{\sqrt{\psi(\xi)}}$. Pour déterminer le rapport des facteurs constants, il suffit de faire x infiniment grand, et l'on a immédiatement ce résultat : *la relation* (25) *est équivalente à celle-ci*

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = 2\int_\infty^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\psi(\xi)}}.$$

Je reviendrai plus loin à la considération des fonctions elliptiques. Pour le moment, je m'arrête encore aux propriétés algébriques de l'équation (24).

22. D'après l'analyse qui a conduit à cette équation (24), on voit

que toute substitution linéaire $\left|\xi, \frac{a\xi+b}{a'\xi+b'}\right|$ effectuée sur ξ a pour effet de changer l'équation différentielle en elle-même, sauf changement de la constante h, et sauf, bien entendu, changement du polynôme χ, du quatrième degré, en son transformé. Je vais utiliser cette propriété *projective* en prenant maintenant deux variables indépendantes η_0, η_1 et considérant Y comme une fonction de ces variables, homogène et du degré zéro. Je reviens alors à l'inconnue primitive y, qui, d'après (23), sera homogène et du degré $(2m-1)$. Au polynôme $\chi(\xi)$ je substitue une forme biquadratique homogène θ; je pose ainsi en même temps

$$y = \eta_0^{2m-1}\mathrm{Y}, \quad \theta = \eta_0^4\chi.$$

Je dénote par des indices les dérivées partielles, ainsi

$$\theta_0 = \frac{\partial\theta}{\partial\eta_0}, \quad \theta_{00} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta_0^2}, \quad \theta_{01} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta_0\,\partial\eta_1}, \quad \cdots.$$

En différentiant, j'ai

$$y_1 = \eta_0^{2m-2}\frac{d\mathrm{Y}}{d\xi}, \quad y_{11} = \eta_0^{2m-3}\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\xi^2}, \quad \cdots,$$

et de même pour les dérivées de χ, ce qui conduit d'abord à la forme

$$\theta y_{11} - (m-1)\theta_1 y_1 + \frac{(2m-1)(m-1)}{6}\theta_{11}y + \frac{\mu}{h^2}\eta_0^2 y = 0.$$

Mais les relations d'homogénéité

$$\theta = \tfrac{1}{12}(\theta_{11}\eta_1^2 + 2\theta_{01}\eta_0\eta_1 + \theta_{00}\eta_0^2),$$

$$\theta_1 = \tfrac{1}{3}(\theta_{11}\eta_1 + \theta_{01}\eta_0),$$

$$y_1 = \frac{1}{2m-2}(y_{11}\eta_1 + y_{01}\eta_0),$$

$$y = \frac{1}{(2m-1)(2m-2)}(y_{11}\eta_1^2 + 2y_{01}\eta_0\eta_1 + y_{00}\eta_0^2)$$

donnent lieu, toutes réductions faites, à la forme définitive suivante :

(28) $$\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00} + \frac{12\mu}{h^2}y = 0.$$

Cette transformée est surtout remarquable par ce fait qu'elle ne contient pas la constante m. Son caractère projectif est d'ailleurs en évidence, car l'ensemble des trois premiers termes, pour deux fonctions homogènes quelconques, est un covariant.

Prenons pour les deux variables η_0, η_1 celles qui font acquérir à θ la forme bicarrée

$$(29) \qquad \theta = \eta_0^4 - 2A\eta_0^2\eta_1^2 + \eta_1^4,$$

et dont le coefficient A a été donné précédemment [nº **17**, équat. (19)]. En tenant compte d'une des relations d'homogénéité et posant, en outre,

$$\frac{(2m-1)(2m-2)}{3}A - \frac{\mu}{h^2} = (2m-1)(2m-2)\nu,$$

nous mettons l'équation (28) sous la forme

$$(30) \qquad \eta_0^2 y_{11} + 2A\eta_0\eta_1 y_{01} + \eta_1^2 y_{00} = (2m-1)(2m-2)\nu y,$$

très propre à faire connaître les cas où y est un polynôme entier.

Le degré de y étant $(2m-1)$, ces cas peuvent avoir lieu si m est entier, ou moitié d'un entier.

23 Soit d'abord m entier, et supposons

$$y = a_0\eta_0^{2m-1} + (2m-1)a_1\eta_0^{2m-2}\eta_1 + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.2}a_2\eta_0^{2m-3}\eta_1^2 + \ldots + a_{2m-1}\eta_1^{2m-1}.$$

En employant le symbole des combinaisons

$$C_p^q = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q},$$

on trouve, par l'identification des deux membres de (30), deux systèmes d'équations, distincts entre eux, contenant l'un les coefficients a

d'indices pairs, l'autre ceux d'indices impairs; ce sont les suivants :

$$\begin{array}{llll}
\nu a_0 & = a_2, & & \\
\nu C^{2}_{2m-1} a_2 & = C^{2}_{2m-3} a_4 & + 2AC^{1}_{2m-3} a_2 & + a_0, \\
\nu C^{4}_{2m-1} a_4 & = C^{4}_{2m-3} a_6 & + 2AC^{3}_{2m-3} a_4 & + C^{2}_{2m-3} a_2, \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\nu C^{2m-4}_{2m-1} a_{2m-4} & = C^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-2} & + 2AC^{2m-5}_{2m-3} a_{2m-4} & + C^{2m-6}_{2m-3} a_{2m-6}, \\
\nu C^{2m-2}_{2m-1} a_{2m-2} & = & + 2AC^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-2} & + C^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-4}, \\
\nu C^{1}_{2m-1} a_1 & = C^{1}_{2m-3} a_3 & + 2Aa_1, & \\
\nu C^{3}_{2m-1} a_3 & = C^{3}_{2m-3} a_5 & + 2AC^{2}_{2m-3} & + C^{1}_{2m-3} a_1, \\
\nu C^{5}_{2m-1} a_5 & = C^{5}_{2m-3} a_7 & + 2AC^{4}_{2m-3} a_5 & + C^{3}_{2m-3} a_3, \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\nu C^{2m-3}_{2m-1} a_{2m-3} & = C^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-1} & + 2AC^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-3} & + C^{2m-5}_{2m-3} a_{2m-5}, \\
\nu C^{2m-1}_{2m-1} a_{2m-1} & = C^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-3}. & &
\end{array}$$

D'après la propriété $C^q_p = C^{p-q}_p$, il est manifeste que ces deux systèmes se changent l'un dans l'autre si l'on échange a_0, a_{2m-1} entre eux, a_2 et a_{2m-3}, a_4 et a_{2m-5}, ..., a_{2m-2} et a_1. Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que l'un et l'autre système soient possibles s'exprime par une seule équation, qu'il est inutile d'écrire ici sous forme de déterminant, et qui est du degré m par rapport au coefficient ν. Cette équation satisfaite, on pourra prendre à volonté un coefficient pair et un coefficient impair. De là le résultat suivant :

Si la constante μ est choisie parmi les racines d'une certaine équation, dont le degré est m, l'équation (28) *est satisfaite par un polynôme y contenant deux coefficients arbitraires* a, b. *Si θ est mis sous la forme bicarrée* (29), *y peut s'écrire*

$$y = \mathrm{a}\,\varkappa_0 f(\varkappa_0^2, \varkappa_1^2) + \mathrm{b}\,\varkappa_1 f(\varkappa_1^2, \varkappa_0^2),$$

où f est un polynôme entier homogène, du degré $(m-1)$.

Pour une telle valeur de μ, l'équation (26), *où la constante m a la même signification, s'intègre algébriquement.*

24. On voit pour quelle raison je me suis cru autorisé à introduire ici cette digression concernant l'équation (26). En permutant les $\varkappa$,

on aura quatre solutions y dont le produit symétrique sera une fonction entière de x; par conséquent, nous obtenons une classe d'équations pour chacune desquelles le produit de quatre solutions est un polynôme entier, et qui pourraient être intégrées par l'application des procédés généraux exposés dans ce Mémoire.

Dans le cas qui nous occupe, l'équation (27) admet pour solution générale un faisceau de polynômes entiers en ξ, du degré $(2m-1)$. D'après le coefficient du second terme, la *jacobienne* de ce faisceau est χ^{2m-1}; par conséquent, le problème consistant à déterminer μ et qui se résout, comme on l'a vu, par une équation du degré m, coïncide avec ce problème de pure Algèbre : *Étant donnée une forme biquadratique, trouver un faisceau de formes de degré impair* $(2m-1)$, *admettant pour jacobienne la puissance* $(m-1)^{\text{ième}}$ *de la forme biquadratique.*

M. Cyparissos Stephanos a consacré un Mémoire d'une haute importance [1] au problème général consistant à chercher les faisceaux qui ont une jacobienne donnée. Il s'agit ici d'un cas particulier de ce problème. Ce savant géomètre a fait voir que, *si une forme y appartient à un faisceau ayant* Θ *pour jacobienne, le covariant*

$$\Theta_{00}y_{11} - 2\Theta_{01}y_{01} + \Theta_{11}y_{00}$$

est divisible par y. Par l'équation (28) nous avons obtenu une proposition analogue coïncidant avec la précédente pour le cas $m=2$, à savoir : *Si la forme y, de degré impair* $(2m-1)$, *appartient à un faisceau ayant pour jacobienne la puissance* $(m-1)^{\text{ième}}$ *d'une forme biquadratique* θ, *le covariant* $\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00}$ *reproduit la forme y, et réciproquement.*

25. Il nous suffira d'appliquer les équations du n° **25** à un exemple, le plus simple, $m=2$.

$$\nu a_0 = a_2, \quad 3\nu a_2 = 2\mathrm{A}a_2 + a_0,$$
$$3\nu^2 - 2\mathrm{A}\nu - 1 = 0,$$
$$\mathrm{A} - \frac{\mu}{2h^2} = 3\nu, \quad \frac{\mu}{2h^2} = \sqrt{\mathrm{A}^2+3}.$$

---

(1) *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (*Savants étrangers*, t. XXVII).

Remplaçant h par l'expression qui résulte de (22) et A par celle qui résulte de (19), nous aurons

$$\mu = \frac{\psi_0}{4}\sqrt{\tau^2 + \tau'^2 + \tau''^2 - \tau\tau' - \tau'\tau'' - \tau''\tau} = \frac{3}{4}\sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}.$$

Envisageant la forme biquadratique $\eta_0^4\psi\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)$, nous voyons figurer ici, sous le radical, son invariant quadratique, et nous pouvons conclure en toute généralité que, θ étant un polynôme de quatrième degré, et y une forme cubique appartenant à un faisceau dont θ est la jacobienne, on a

$$\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00} = \pm 24\sqrt{\frac{3I}{2}}\,y,$$

formule dans laquelle I est l'invariant quadratique de θ. Ce résultat s'accorde avec ce qu'on savait déjà sur ce sujet [1].

26. J'ai encore à examiner les cas où, dans (30), y est un polynôme entier, quand m est la moitié d'un entier impair. Mettant $2n$ au lieu de $(2m-1)$, supposons

$$y = a_0 x_0^{2n} + 2na_1 x_0^{2n-1}x_1 + \frac{2n(2n-1)}{1.2}a_2 x_0^{2n-2}x_1^2 + \ldots + a_{2n}x_1^{2n}.$$

On trouve ici, comme pour le cas précédent, deux systèmes distincts contenant l'un les coefficients pairs, l'autre les coefficients impairs. Mais ces deux systèmes diffèrent entre eux. Pour abréger, j'omets de les écrire : ils suivent la même loi que dans le cas précédent, mais la différence porte sur les équations extrêmes. Ici l'on pourra trouver la constante de manière à rendre possible seulement un des deux systèmes au choix; l'autre n'aura pour solution qu'un ensemble de coefficients nuls. Chacun des deux systèmes présente une symétrie par rapport aux coefficients également distants des extrêmes, en sorte que l'équation relative au coefficient ν se décompose. Voici finalement le résultat :

L'équation (28) *admet pour solution* y *un polynôme entier et homo-*

---

(1) *Voir*, par exemple, le Mémoire cité de M. Stephanos, p. 40 et 43.

gène de degré pair $2n$, si la constante μ est une racine d'une quelconque de quatre équations, dont trois sont du degré $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant la parité de n, la quatrième du degré $\frac{n}{2}+1$ ou $\frac{n-1}{2}$.

Si θ est mis sous la forme biquadratique (29), les formes de y sont les suivantes, où $T_s(a, b)$ désigne une fonction homogène, de degré s en a, b et symétrique par rapport à ces lettres.

1° *n pair. — Si μ est racine de l'équation de degré $\frac{n}{2}+1$,*

$$y = T_n(\eta_0^2, \eta_1^2).$$

Si μ est racine d'une des trois autres équations, y a l'une des formes suivantes, dont chacune est relative à une équation

$$y = (\eta_0^2 - \eta_1^2)T_{n-1}(\eta_0^2, \eta_1^2),$$
$$y = \eta_0\eta_1 T_{n-1}(\eta_0^2, \eta_1^2),$$
$$y = \eta_0\eta_1(\eta_0^2 - \eta_1^2)T_{n-2}(\eta_0^2, \eta_1^2).$$

2° *n impair. — La quatrième forme correspond à la racine de l'équation du degré $\frac{n-1}{2}$; les trois autres aux racines des trois autres équations.*

La constante μ étant ainsi choisie, l'équation (26), où l'on remplace $(2m-1)$ par $2n$, a une solution particulière algébrique.

27. Appliqués à l'exemple $n = 1$, les calculs que je viens d'indiquer donnent facilement le résultat que voici : l'équation

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mu - \tfrac{1}{12}\psi'')y = 0$$

a pour solution particulière $y = \sqrt{\tau - x}$ si l'on prend $\mu = \frac{\psi_0}{12}(\tau' + \tau'' - 2\tau)$. La permutation des racines donne les deux autres cas; le quatrième n'existe pas à cause de $\frac{n-1}{2} = 0$.

Pour $n = 2$, voici le résultat : l'équation

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mu - \tfrac{1}{4}\psi'')y = 0$$

a pour solution particulière $y = \sqrt{(\tau - x)(\tau' - x)}$, si l'on prend

$\mu = \frac{\psi_0}{4}(2\tau'' - \tau - \tau')$; par permutation on a deux autres cas; enfin, si l'on prend $2\mu = \pm\sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}$, on aura la solution

$$y = x + \frac{\psi_1 \pm \sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}}{\psi_0}.$$

28. L'équation (26), qui, si l'on y remplace $(2m - 1)$ par $2n$, s'écrit

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + \left[\mu - \frac{n(n+1)}{24}\psi''\right] y = 0,$$

n'est, en réalité, pas autre chose que l'équation de Lamé. Que l'on y fasse

$$\psi(x) = x(1-x)(1-k^2 x), \quad x = \mathrm{sn}^2 u,$$

et qu'on prenne u pour variable indépendante, on obtiendra la transformée

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \left[n(n+1)k^2 \,\mathrm{sn}^2 u + \frac{1+k^2}{3} - 4\mu\right] y,$$

ou encore, si l'on fait

$$\psi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = pu :$$

$$\frac{d^2 y}{du^2} = [n(n+1)pu - \mu]\, y.$$

Les cas dont nous nous sommes occupé en dernier lieu, ceux où n est un nombre entier, sont précisément ceux qu'a considérés Lamé. La méthode employée ici est très différente de celle qu'a employée Lamé, et ne conduit pas moins à la même conclusion, relativement à l'existence de quatre équations distinctes pour l'inconnue μ (1). Quant au cas précédent, celui où m est entier, c'est-à-dire où n est la moitié d'un entier impair, la conclusion, nous l'avons vu, consiste en ce qu'on

(1) *Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* (*Journal de Math.*, 1re sér., t. IV, p. 141).

peut déterminer μ comme racine d'une équation de degré $(n+\frac{1}{2})$, de sorte que la solution générale de (26) soit algébrique. Pour l'équation de Lamé, cette conclusion se transforme en ceci : la solution générale est le produit de $\left(p'\frac{u}{2}\right)^{-n}$ par un polynôme entier, du degré $2n$, par rapport à $p\frac{u}{2}$. J'avais déjà formulé cette conclusion et donné la transformée (27) dans d'autres occasions [1]. Antérieurement, M. Brioschi avait fait connaître une première indication sur ce sujet [2], et conclu nettement plus tard [3]. M. Appell a traité aussi le cas $n=\frac{1}{2}$ [4]. Les géomètres verront avec plaisir, je pense, dans l'analyse actuelle, la réunion de ces deux cas de l'équation de Lamé, en apparence si différents, et qui viennent coïncider avec ce problème algébrique : *θ étant une forme biquadratique binaire, trouver une autre forme y telle que le covariant $\theta_{00}y_{11}-2\theta_{01}y_{01}+\theta_{11}y_{00}$ reproduise y.*

29. On pourrait vouloir poursuivre la série de ces recherches, et demander d'intégrer une équation du second ordre connaissant le produit de *cinq*, ou *six*, ou un nombre quelconque de solutions. Les formes de degré impair, à partir du cinquième inclusivement, ont des covariants linéaires rationnels. Donc en général, le produit d'un nombre impair de solutions étant connu, l'équation s'intègre algébriquement et *rationnellement*, ce qui constitue une différence essentielle avec le cas où il s'agit de trois solutions seulement. Pour rencontrer des circonstances différentes, il faudra recourir aux formes binaires exceptionnelles, dont les covariants linéaires rationnels sont identiquement nuls.

De même, pour les formes de degré pair, à partir du sixième inclusivement, il existe des covariants quadratiques rationnels, et, par suite,

---

(1) *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (*Acta mathematica*, t. III, p. 379); et *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (*Savants étrangers*, t. XXVIII, p. 105).

(2) *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 315.

(3) *Ibid.*, t. XCI, p. 319.

(4) *Ibid.*, t. XCII, p. 1007.

des covariants linéaires dont l'irrationnalité est seulement du second degré. Par suite, en général, le produit connu d'un nombre pair de solutions conduit à l'intégration par l'extraction d'une racine carrée. Les formes binaires exceptionnelles dont les covariants quadratiques sont nuls fourniront seules des exemples contradictoires.

Si l'on voulait épuiser le sujet en suivant cette voie, on retrouverait les formes *polyédriques* dont l'intervention est déjà bien connue dans la théorie des équations linéaires du second ordre. Mais je n'ai pas l'intention d'y revenir ici, et je vais aborder l'application de ma théorie générale aux équations du troisième ordre.

III. — ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

Multiplicateurs quadratiques.

30. Laissant de côté, comme je l'ai déjà dit, les formes quadratiques, nous rencontrons pour premier problème, dans les équations du troisième ordre, celui-ci : *Intégrer une équation linéaire du troisième ordre, connaissant, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'une forme cubique ternaire composée avec trois solutions inconnues.*

Le principe de la solution peut se résumer ainsi : *Calculer pour l'équation adjointe l'intégrale qui a pour source la fonction donnée, et réduire cette intégrale, forme cubique ternaire, à la forme canonique. Les covariants linéaires canoniques fournissent immédiatement les solutions cherchées.*

Cette solution est ainsi basée sur une des théories algébriques les plus parfaites que nous possédions, celle des formes cubiques ternaires. Il s'agit ici de la dégager explicitement pour la réduire en formules susceptibles d'applications immédiates.

Au lieu des intégrales cubiques, je considérerai les multiplicateurs quadratiques correspondants, ce qui est plus simple. J'ai indiqué (n° **12**) le procédé général pour trouver les équations déterminant un multiplicateur. Il est fondé sur la *réduction* des produits $\varpi y^m y'^{m'} y''^{m''} \ldots$, où ϖ est une fonction quelconque de la variable indépendante. Les formules de cette réduction pour les produits cubiques ternaires sont

les suivantes :

$$
(31)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\varpi y^2 y' & = -\frac{1}{3}\varpi' y^3 & + \frac{1}{3}(\varpi y^3)', \\
\varpi y^2 y'' & = -2\varpi y y'^2 + \frac{1}{3}\varpi'' y^3 & + (\varpi y^2 y' - \frac{1}{3}\varpi' y^3)', \\
\varpi y^2 y''' & = \quad \varpi y'^3 + 3\varpi' y y'^2 - \frac{1}{3}\varpi''' y^3 & + (\varpi y^2 y'' - \varpi y y'^2 - \varpi' y^2 y' + \frac{1}{3}\varpi'' y^3)', \\
\varpi y y' y'' & = -\frac{1}{2}\varpi y'^3 - \frac{1}{2}\varpi' y y'^2 & + \frac{1}{2}(\varpi y y'^2)', \\
\varpi y y' y''' & = -\varpi y y''^2 + \frac{5}{6}\varpi' y'^3 + \frac{1}{2}\varpi'' y y'^2 & + (\varpi y y' y'' - \frac{1}{3}\varpi y'^3 - \frac{1}{2}\varpi' y y'^2)', \\
\varpi y y'' y''' & = -\frac{1}{2}\varpi y' y''^2 - \frac{1}{2}\varpi' y y''^2 & + \frac{1}{2}(\varpi y y''^2)'.
\end{array}
\right.
$$

Parmi les produits qu'on aura à considérer ici, ceux qui ne figurent pas dans les six équations immédiatement s'en déduisent par un changement des accents. Par exemple, pour réduire $\varpi y'^2 y'''$, on n'a qu'à changer y en y' et, par suite, y' en y'', y'' en y''' dans la seconde formule.

La forme linéaire $G(y)$ et le multiplicateur quadratique $M(y)$ étant représentés par

$$
\begin{aligned}
G(y) &= g_0 y''' + 3g_1 y'' + 3g_2 y' + g_3 y, \\
M(y) &= p y''^2 + q y'^2 + r y^2 + 2h y' y'' + 2l y y'' + 2m y y',
\end{aligned}
$$

nous effectuons le produit MG ; nous réduisons tous les termes suivant les formules précédentes, et nous égalons à zéro les coefficients des termes irréductibles, c'est-à-dire fournis par la première partie des seconds membres de (31). Ceci, nous l'avons vu (n° **12**), doit fournir six équations différentielles pour les coefficients de M. Voici ces équations (en face et à gauche de chacune d'elles, j'ai indiqué la quantité irréductible dont on a égalé à zéro le coefficient) :

$$
(32)\quad \left\{
\begin{array}{l|l}
y''^3 & 3g_0 h + (g_0 p)' - 9g_1 p = 0, \\
y' y''^2 & g_0 l + (g_0 h)' - 6g_1 h + 2g_0 q - 3g_2 p = 0, \\
y y''^2 & 2g_0 m + (g_0 l)' - 6g_1 l - g_3 p = 0, \\
y'^3 & g_0 r + \frac{5}{3}(g_0 m)' - 3g_1 m - 3g_2 l \\
 & \qquad - 2(g_2 h)' - g_3 h + \frac{1}{3}(g_0 q)'' - (g_1 q)' + 3g_2 q = 0, \\
y y'^2 & 3(g_0 r)' - 6g_1 r + (g_0 m)'' - 3(g_1 m)' \\
 & \qquad + 6g_2 m - 3(g_2 l)' - 4g_3 l - (g_3 h)' + g_3 q = 0, \\
y^3 & (g_0 r)''' - 3(g_1 r)'' + 3(g_2 r)' \\
 & \qquad - 3g_3 r + 2(g_3 m)' - 2(g_3 l)'' = 0.
\end{array}
\right.
$$

De ces six équations, les quatre premières donnent explicitement h, l, m, r en fonction linéaire de p, q et des dérivées de p, q. En substituant dans les deux dernières, on aura deux équations linéaires simultanées aux inconnues p, q. L'élimination de q entre ces dernières conduirait à l'équation finale en p, qui est du dixième ordre : c'est l'équation aux cubes (multipliés par g_0^3) des solutions de l'adjointe $\Gamma(\eta) = 0$. Généralement, par le moyen des deux dernières équations, on pourra exprimer q en fonction linéaire de p et de ses dérivées. Suivant l'hypothèse, on connaît p; donc par là on peut trouver le multiplicateur explicitement.

51. Nous savons que le cas d'exception est celui où l'équation en p est d'ordre inférieur à 10. Il importe de reconnaître comment le calcul mettra ce cas en évidence. Mais, pour ce but, je vais faire d'abord une simplification.

J'ai pris G sous la forme *complète*, afin d'avoir immédiatement les éléments les plus commodes pour les applications, où tout changement est d'habitude fort gênant. Mais, pour une théorie générale, cet avantage disparaît, et l'on n'a que l'inconvénient d'allonger les calculs. Pour faire l'élimination, je supposerai donc $g_0 = 1$, $g_1 = 0$. La première hypothèse est évidemment permise, la seconde implique seulement un changement de y en αy, α étant une fonction convenablement choisie. Ce changement, fait dans G et dans M, n'altère pas la propriété qu'a le produit d'être une exacte dérivée. On pourrait aussi, par un changement de la variable indépendante, supposer $g_2 = 0$; mais ce changement, sans simplifier beaucoup, présente plusieurs inconvénients, et je ne le ferai pas. Dans le résultat final, comme on verra, il me sera facile de revenir à la supposition que g_0 et g_1 sont quelconques.

Dans les équations (32), je fais donc $g_0 = 1$, $g_1 = 0$, je tire h, l, m, r des quatre premières, et je substitue dans les deux dernières. J'ordonne le résultat par rapport aux dérivées de q, et je mets dans le second membre les termes qui contiennent p ou ses dérivées. Ces termes étant inutiles pour mon but, je m'abstiens de les reproduire, et je les désigne par des majuscules. Ainsi A, B, C, D vont signifier des fonctions linéaires de p, p', p'', ...

En outre, je fais disparaître g_3 en introduisant à sa place la quan-

tité v

$$v = 3g_2' - 2g_3.$$

Les équations qui résultent de ce calcul sont les suivantes

$$q''' + 3g_2 q' + \left(\tfrac{3}{2}g_2' + \tfrac{9}{10}v\right)q = \mathrm{A}, \tag{33}$$

$$21vq'' + 7v'q' + (27g_2 v + v'')q = \mathrm{B}, \tag{34}$$

provenant respectivement de la sixième et de la cinquième équation.

52. Ici déjà s'offre un premier cas particulier, celui où v est identiquement nul. On le voit, en ce cas, l'équation finale en p se réduit à $\mathrm{B} = 0$, qui est seulement du septième ordre, et q ne peut être trouvé, en fonction de p, que par l'équation (33), du troisième ordre. Ce dernier fait est la conséquence du précédent. Trois relations cubiques homogènes, à coefficients constants, linéairement distinctes entre elles, ont lieu entre les η. Donc, de toute nécessité, il existe entre ces quantités une relation quadratique homogène, à coefficients constants. C'est bien, en effet, là ce que signifie l'égalité $v = 0$, et v est cet invariant qui, pour la première fois, a été signalé par M. Laguerre ([1]). L'équation (33), d'où dépend q, coïncide avec les proposées $\mathrm{G}(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$ (qui, en ce cas, coïncident entre elles), sauf le second membre A. Il y a donc lieu de revenir à la proposée, qui se ramène à l'équation du second ordre

$$z'' + \tfrac{3}{4}g_2 z = 0.$$

En effet, on prouve aisément que les solutions η sont les produits de deux solutions z entre elles. Le problème proposé, en ce cas particulier, consiste donc à intégrer cette équation du second ordre, quand on connaît le produit de six solutions, et nous n'avons plus à nous en occuper.

53. Supposant désormais v différent de zéro, nous pouvons, par

---

([1]) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

deux dérivations, réduire le système (33), (34) à ne contenir que q et q'. Dans ce calcul s'introduit une nouvelle combinaison δ :

$$\delta = 27 g_2 \nu^2 + 7\nu'^2 - 6\nu\nu'',$$

qui est un invariant fondamental, fournissant avec ν tous les autres invariants. Voici le résultat de ce calcul :

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & 4\delta q' + \left(\frac{1}{2}\delta' + \frac{3^4.7}{10}\nu^3\right) q = \mathrm{C}, \\ & \left(28\delta\nu' - \frac{3^3.7}{2}\nu\delta' - \frac{3^5.7^2}{10}\nu^4\right) q' \\ & \quad + \left(2^2\, 3^3 g_2 \nu\delta + 4\delta\nu'' - \frac{21}{2}\nu\delta'' - \frac{3^6.7^2}{10}\nu^3\nu'\right) q = \mathrm{D}. \end{aligned} \right.$$

Le second cas particulier s'offre maintenant : c'est celui où le déterminant des coefficients de q et q' est nul. En introduisant les deux invariants δ_1 et θ

$$\delta_1 = 3\nu\delta' - 8\delta\nu', \quad \theta = 2\delta\delta'_1 - 3\delta_1\delta',$$

on trouve ce déterminant sous la forme

$$(36)\qquad \Omega = 7\theta - \frac{3^4.7^2}{2}\nu^3\delta_1 - \frac{3^9.7^3}{100}\nu^7 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{7}{4}\delta_1^2 - 16\delta^3\right).$$

Il y faut observer que $\left(\frac{7}{4}\delta_1^2 - 16\delta^3\right)$ est divisible par ν, en sorte que Ω est une fonction entière des coefficients g_2, g_3 et de leurs dérivées. L'égalité $\Omega = 0$ exprime qu'entre les η il existe une relation cubique, homogène, à coefficients constants. Si elle a lieu, q se trouve donné par une seule des équations (35), à volonté, et le multiplicateur se trouvera par le moyen d'une quadrature. Dans le cas opposé, les équations (35) simultanées donnent explicitement q, et le multiplicateur sera trouvé sans quadrature. Arrêtons-nous un instant sur l'équation $\Omega = 0$. Elle présente cette circonstance qu'exprimant une propriété de $\Gamma(\eta) = 0$, elle contient les coefficients de l'adjointe $\mathrm{G}(y) = 0$. Mais la théorie des invariants, à laquelle je renvoie [1], nous enseigne que les

[1] Voir mon Mémoire sur la *Réduction des équations différentielles*, déjà cité, chap. III.

invariants δ, v, δ_1, θ sont communs aux deux équations, sauf changement de signe pour les trois derniers seulement. Il n'y a donc qu'à effectuer ce changement ici. De plus, j'ai annoncé que, le calcul fait, je rétablirais les coefficients g_0, g_1. Effectivement, renvoyant le lecteur à la même théorie, j'énonce le résultat suivant :

Ayant posé

$$v = 3\left(\frac{g_2}{g_0}\right)' - 2\frac{g_3}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)'' - 6\frac{g_1}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' + 6\frac{g_1 g_2}{g_0^2} - 4\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3,$$

$$\delta = 27v^2\left[\frac{g_2}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\right] + 7v'^2 - 6vv'',$$

$$\delta_1 = 3v\delta' - 8\delta v', \quad \theta = 2\delta\delta_1' - 3\delta_1\delta',$$

1° *on exprime que trois solutions y de $G(y) = 0$ sont liées par une relation cubique, homogène, à coefficients constants, au moyen de la relation*

$$\Omega_1 = 7\theta + \frac{3^4.7^2}{2}v^3\delta_1 - \frac{3^9.7^3}{100}v^7 + \frac{1}{v}\left(\frac{7}{4}\delta_1^2 - 16\delta^3\right) = 0;$$

2° *par la relation* (36) $\Omega = 0$, *on exprime que la même propriété a lieu pour l'équation adjointe* $\Gamma(\eta) = 0$.

Quand on emploie, comme je l'ai fait déjà, la notion de *courbe attachée à l'équation*, c'est-à-dire lieu du point dont les coordonnées homogènes dans le plan sont trois solutions y, alors $\Omega_1 = 0$ exprime que cette courbe est du troisième degré, $\Omega = 0$ exprime qu'elle est de troisième classe. Ce sont, à un autre point de vue, les équations différentielles des courbes, soit du troisième degré, soit de la troisième classe, de même que $v = 0$ est l'équation différentielle des coniques.

34. Revenons au multiplicateur M, qui peut maintenant être envisagé comme étant connu, sa source p étant donnée.

D'après le théorème II (n° **9**), un invariant de $u^3 g_0 M$, du degré m par rapport aux coefficients est de la forme $u^m g_0 p'$, où p' est le premier coefficient d'un multiplicateur M' du degré $(m-1)$. Comme M

est quadratique, le seul invariant est le discriminant, et l'on a $m = 3$. Donc *le discriminant de* $u^3 g_0 \mathrm{M}$ *est le premier coefficient de* $u^3 g_0 \mathrm{M}'$, M' *étant un autre multiplicateur quadratique*. Il serait inutile de chercher un nouveau multiplicateur par le moyen du discriminant de $u^3 g_0 \mathrm{M}'$; car *toute forme du faisceau* $u^3 g_0(\varkappa \mathrm{M} + \lambda \mathrm{M}')$ *a pour discriminant une fonction appartenant au faisceau* $u^3 g_0(\varkappa p + \lambda p')$; *il est, par conséquent, la source d'un multiplicateur appartenant au faisceau* $\varkappa \mathrm{M} + \lambda \mathrm{M}'$. En effet, F étant l'intégrale cubique qui correspond à M, le hessien de $u^3 \mathrm{F}$ a la forme $u^3 \mathrm{F}'$, où F' est une nouvelle intégrale cubique. C'est la conséquence du théorème I (n° **8**). Il suffit de jeter les yeux sur le hessien d'une forme cubique pour reconnaître que M' est le multiplicateur correspondant à F'. La proposition résulte alors de ce fait connu que, *dans le faisceau composé d'une forme cubique ternaire et de sa hessienne, chaque forme a pour hessienne une forme du faisceau*.

C'est précisément sur cette propriété qu'est fondée la réduction des formes cubiques ternaires. On cherche, dans le faisceau, une forme qui coïncide avec sa hessienne; elle est décomposable en facteurs linéaires, qui sont les covariants linéaires de la forme canonique. Cette recherche pourra se faire sur les multiplicateurs; on cherchera, dans le faisceau $u^3 g_0(\varkappa \mathrm{M} + \lambda \mathrm{M}')$, une forme dont le discriminant soit $u^3 g_0(\varkappa p + \lambda p')$, et la solution s'ensuivra. Nous voyons toutefois cette solution tomber en défaut si ce multiplicateur cherché est justement M. Traitons d'abord ce cas particulier, qui exigera des quadratures.

PRODUIT DE TROIS SOLUTIONS.

35. On sera averti qu'on est en présence de ce cas particulier si l'on sait d'avance que la fonction donnée est le produit de trois solutions. Si, au contraire, on connaît l'expression d'une forme cubique composée avec trois solutions, sans savoir que cette forme est le produit de trois facteurs linéaires, on s'en apercevra par cette circonstance que le discriminant de $u^3 g_0 \mathrm{M}$ reproduira $u^3 g_0 p$ (à un facteur constant près). Notons que la même circonstance se présente encore dans le cas que caractérise l'équation $\Omega = 0$, si p n'est pas nul. En effet, en ce cas, il existe un multiplicateur à source zéro, par suite une infinité de multi-

plicateurs ayant une même source. Mais le calcul du multiplicateur, comme on l'a vu plus haut, fait nécessairement reconnaître ce cas, lorsqu'il a lieu, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

La méthode à suivre est analogue à celle du n° **15**. L'intégrale F étant le produit de trois intégrales linéaires B, il suffit de considérer, dans F, les termes en y'' et y'; soit donc

$$F = a_0 y''^3 + 3a_1 y''^2 y' + 3a_2 y'' y'^2 + a_3 y'^3 + \ldots,$$

on considérera l'équation

$$a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3 = 0$$

pour en conclure la solution

$$\eta = \frac{1}{g_0 u^3} e^{\int z\,dx}.$$

Les coefficients a_0, a_1, a_2 sont connus immédiatement par le multiplicateur; quant à a_3, il se conclut aisément de la partie qui, dans les formules (31), est composée de dérivées exactes. Le multiplicateur étant

$$M = py''^2 + 2hy'y'' + qy'^2 + \ldots,$$

on a, en définitive,

$$a_0 = \tfrac{1}{3} g_0 p, \quad a_1 = \tfrac{1}{3} g_0 h, \quad a_2 = \tfrac{1}{3} g_0 q,$$
$$a_3 = \tfrac{1}{3}[6g_2 h + 3g_1 q - (g_0 q)' - 2g_0 m].$$

APPLICATION.

36. Voici un exemple numérique : *Intégrer l'équation*

$$\Gamma(\eta) = \eta''' - \frac{3}{x^2}\eta' + \left(\frac{3}{x^3} + k^3\right)\eta = 0,$$

où k est une constante, sachant qu'une forme cubique, composée avec trois solutions η, a pour expression $k^3 + \frac{1}{x^3}$.

On a

$$G(y) = y''' - \frac{3}{x^2}y' + \left(\frac{3}{x^3} - k^3\right)y,$$

$$p = k^3 + \frac{1}{x^3}, \quad q = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^3} - k^3\right), \quad r = \frac{1}{x^4}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right),$$

$$h = \frac{1}{x^4}, \quad l = -\frac{1}{x^2}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right), \quad m = -\left(\frac{k^6}{2} + \frac{1}{x^6}\right).$$

Le discriminant $pqr + 2hlm - pm^2 - ql^2 - rh^2$ se réduit à

$$-\frac{k^{12}}{4}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right),$$

circonstance qui avertit de ce fait : *la forme cubique est le produit de trois solutions*. L'équation en z est la suivante :

$$\left(\frac{1}{x^3} + k^3\right)z^3 + \frac{3}{x^4}z^2 + \frac{3}{x^2}\left(\frac{1}{x^3} - k^3\right)z + \left(\frac{1}{x^3} - k^3\right)^2 = 0$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{(xz + 1 - k^3x^3)^3 - k^6x^6z^3}{x^6(1 - k^3x^3)} = 0.$$

Il en résulte, ω étant une racine cubique de l'unité,

$$z = -\frac{1 - k^3x^3}{x(1 - \omega^2k^2x^2)} = \frac{d}{dx}\left[-\omega kx + \log\left(\omega k + \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\eta = \left(\omega k + \frac{1}{x}\right)e^{-\omega kx}.$$

Les trois racines cubiques ω donnent les trois solutions, dont le produit est égal à $k^3 + \frac{1}{x^3}$ [1].

---

[1] Cet exemple est emprunté à mon *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* (p. 180); la même méthode peut s'appliquer à l'équation

$$\eta''' - \frac{n^2 - 1}{x^2}\eta' + \left(\frac{n^2 - 1}{x^3} + k^3\right)\eta = 0,$$

où n est un entier premier avec 3; il y a trois solutions dont le produit est rationnel.

FORME CUBIQUE TERNAIRE.

37. Traitons maintenant le cas général du problème. J'admets comme bien connue la théorie des formes cubiques ternaires, et je rappelle d'abord les formules dont je vais faire usage.

J'emploie les mêmes notations et, pour les invariants et covariants, les mêmes facteurs numériques que l'on trouve dans Clebsch (*Vorlesungen über Geometrie*, bearb. und herausgegeben von Lindemann, p. 562 et suiv.). Je mets seulement les indices 0, 1, 2 aux indéterminées au lieu de 1, 2, 3, pour rappeler que ces indéterminées sont ici

$$x_0 = y, \quad x_1 = y', \quad x_2 = y''.$$

La forme cubique est désignée par f, ses invariants du quatrième et du sixième degré par S et T respectivement, sa hessienne par Δ, l'expression numérique de Δ est le déterminant des dérivées secondes de f, divisé par 36. Il y a, en outre, à considérer un covariant φ, dont l'expression est la suivante : le produit $-2.3^4\varphi$ est égal au déterminant des dérivées secondes de f, *bordé* par les dérivées premières de Δ. Enfin un autre covariant ψ intervient, à savoir

$$\psi = -\tfrac{3}{4}\varphi - \tfrac{1}{12}\mathrm{T}f^2 + \tfrac{1}{8}\mathrm{S}\,\Delta f$$

et ce dernier est un *combinant* pour le faisceau (f, Δ).

Avec les invariants S, T est composée une forme binaire, biquadratique et équianharmonique aux indéterminées $\varkappa, \lambda$, que je désigne par $\mathrm{U}(\varkappa, \lambda)$, et qui dans Clebsch est désignée par la lettre G :

$$\mathrm{U}(\varkappa, \lambda) = \varkappa^4 - \mathrm{S}\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}\mathrm{T}\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}\mathrm{S}^2\lambda^4.$$

Voici, par le moyen de ces éléments, les résultats que j'ai à rappeler :

1° La hessienne $\Delta_{\varkappa\lambda}$ de la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$ est égale à

$$(37) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varkappa}\Delta - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda}f\right).$$

2° Si $\varkappa : \lambda$ est racine de $\mathrm{U} = 0$, la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$ est décomposable en facteurs linéaires X_0, X_1, X_2, qui sont des covariants irrationnels.

3° Les fonctions symétriques de ces facteurs sont exprimées ainsi :

$$
(38)\quad\left\{
\begin{aligned}
&X_0^3+X_1^3+X_2^3 = -\frac{1}{3-\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}\left[\left(1-\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)f-2\,\frac{\lambda}{\varkappa}\,\Delta\right],\\
&X_0^3X_1^3X_2^3 = \frac{1-\frac{3}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}{3^3\left(3-\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^3}\left(f+\frac{\lambda}{\varkappa}\,\Delta\right)^3,\\
&X_0^3X_1^3+X_1^3X_2^3+X_2^3X_0^3-\frac{1}{12}\left(X_0^3+X_1^3+X_2^3\right)^2\\
&\qquad = -\frac{4}{\left(3-\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^2}\,\frac{\lambda^3}{\varkappa^3}\,\psi.
\end{aligned}\right.
$$

58. Soit maintenant F une intégrale cubique de G (y). Nous prenons, pour la forme f, d'après le théorème I, n° 8, $f = u^3\mathrm{F}$. Le multiplicateur quadratique correspondant est M ; nous prenons la forme quadratique $\mathrm{A} = u^3 g_0 \mathrm{M}$, et nous avons

$$\mathrm{A} = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Nous faisons ensuite $\Delta = u^3\,\mathrm{F}'$ et F′ est une nouvelle intégrale cubique; le multiplicateur correspondant étant désigné par M′, nous considérons la forme quadratique $\mathrm{A}' = u^3 g_0 \mathrm{M}' = \dfrac{\partial\Delta}{\partial x_2}$.

Soient p et p' les coefficients de y''^2 dans M et M′ respectivement. Les coefficients correspondants dans A et A′ sont

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= u^3 g_0 p = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3},\\
a'_{22} &= u^3 g_0 p' = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\mathrm{A}'}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_2^3}.
\end{aligned}
$$

De là résulte que a'_{22} est égal au déterminant des dérivées secondes de A, divisé par 12, ce qui peut encore s'exprimer ainsi. Posant

$$\mathrm{A} = \Sigma\, a_{ij}\, x_i x_j$$

et employant les lettres α pour les coefficients de la forme adjointe, savoir

$$\alpha_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad \alpha_{01} = a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}, \quad \ldots,$$

on aura

$$a'_{22} = \tfrac{2}{9}\,\Sigma\, a_{ij}\alpha_{ij}.$$

Pour obtenir le coefficient de $y''^6 = x_2^6$ dans le covariant φ, on n'a qu'à remplacer, dans le déterminant qui représente ce covariant, f par $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ et Δ par $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial x_2^2}$. Il en résulte, pour ce coefficient, l'expression

$$\frac{2}{3^4}\,\Sigma\,\alpha_{ij}\,a'_{i2}\,a'_{j2},$$

où les lettres a' représentent les coefficients de la forme A'

$$A' = \Sigma\, a'_{ij}x_i x_j.$$

D'après la théorie générale, nous aurons à prendre, dans les covariants X, les coefficients de $y'' = x_2$. Il nous faudra donc remplacer, dans les formules, f et Δ par $\frac{1}{3}a_{22}$, $\frac{1}{3}a'_{22}$ et φ par le coefficient que nous venons de considérer. A cause de l'homogénéité, nous pouvons multiplier les deux premiers par 3, le second par 3^2. Ainsi

$$\left.\begin{matrix} f \\ \Delta \\ \varphi \end{matrix}\right\}\ \text{seront remplacés respectivement par}\ \left\{\begin{aligned} & a_{22} = u^3 g_0 p, \\ & a'_{22} = u^3 g_0 p', \\ & \frac{2}{3^2}\,\Sigma\,\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2}. \end{aligned}\right.$$

Il reste à exprimer les deux invariants S, T par les coefficients de A et A'. Pour y parvenir, on n'aura qu'à calculer le discriminant de $\varkappa A + \lambda A'$; il s'exprime par a'_{22} et a_{22} comme $\Delta_{\varkappa\lambda}$ par Δ et f, au moyen de la relation (37). On connaîtra ainsi la forme $U(\varkappa, \lambda)$ et le problème sera résolu.

59. Je vais introduire une modification qui simplifie les calculs dans les applications et rend, en outre, les formules symétriques. Au lieu de prendre la forme A', j'en considère une autre quelconque A_1, du

faisceau $\varkappa A + \lambda A'$, et l'on conçoit que l'on puisse parfois en apercevoir immédiatement une qui soit plus simple.

Soient ainsi deux formes conjuguées A et A_1; posons

$$A = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad A_1 = \Sigma b_{ij} x_i x_j,$$
$$P = a_{22}, \quad P_1 = b_{22},$$
$$D = \tfrac{2}{9} \Sigma a_{ij} \alpha_{ij}, \quad D_1 = \tfrac{2}{9} \Sigma b_{ij} \beta_{ij},$$
$$C = \tfrac{2}{3} \Sigma \alpha_{ij} b_{ij}; \quad C_1 = \tfrac{2}{3} \Sigma \beta_{ij} a_{ij}.$$

Les lettres β désignent les coefficients de la forme adjointe de A_1, comme α précédemment pour A.

Soit D_{ll_1} le discriminant, calculé comme D et D_1, pour la forme $lA + l_1 A_1$. Ce discriminant est une fonction comprise dans le faisceau $lP + l_1 P_1$. Il est d'ailleurs composé linéairement avec D, C, C_1, D_1. Donc C et C_1, comme D et D_1, sont comprises dans le même faisceau. Désignant par σ, ω, ϖ, t et les mêmes lettres affectées de l'indice 1 des coefficients constants, j'aurai donc

$$D = \sigma P + \omega P_1, \quad D_1 = \sigma_1 P_1 + \omega_1 P,$$
$$\tfrac{1}{3} C = \varpi P + tP_1, \quad \tfrac{1}{3} C_1 = \varpi_1 P_1 + t_1 P.$$

La forme A′, considérée tout à l'heure, appartient au faisceau (A, A_1). Nous avons donc

$$\varkappa P + \lambda D = lP + l_1 P_1,$$

d'où résulte

$$l = \varkappa + \sigma\lambda, \quad l_1 = \omega\lambda.$$

Par cette substitution $U(\varkappa, \lambda)$ se change en une forme $V(l, l_1)$, et, d'après (37), nous aurons

$$D_{ll_1} = \tfrac{1}{4}\left(P_1 \frac{\partial V}{\partial l} - P \frac{\partial V}{\partial l_1}\right).$$

D'ailleurs nous avons aussi

$$D_{ll_1} = l^3 D + l^2 l_1 C + l l_1^2 C_1 + l_1^3 D_1.$$

Il suffit maintenant d'identifier ces deux formes de D_{u_1} pour trouver entre les coefficients ci-dessus les relations

$$\sigma + t = 0, \quad \sigma_1 + t_1 = 0, \quad \varpi + \varpi_1 = 0.$$

Nous aurons donc définitivement

$$D = \sigma P + \omega P_1, \qquad D_1 = \quad \sigma_1 P_1 + \omega_1 P,$$
$$\tfrac{1}{3}C = \varpi P - \sigma P_1, \quad \tfrac{1}{3}C_1 = - \varpi P_1 - \sigma_1 P.$$

En outre, la forme V étant équianharmonique, il y aura encore entre les coefficients la relation

$$\omega\omega_1 - 4\sigma\sigma_1 = 3\varpi^2,$$

et cette forme elle-même sera

$$V(l, l_1) = \omega l^4 - 4\sigma l^3 l_1 - 6\varpi l^2 l_1^2 + 4\sigma l l_1^3 - \omega_1 l_1^4.$$

La comparaison des formes U, V donne aisément les expressions de S, T.

$$\tfrac{1}{2}S = 3(\sigma^2 + \omega \varpi), \quad \tfrac{1}{3}T = 2\sigma^3 + 3\omega\varpi\sigma - \sigma_1\omega^2.$$

En désignant par k une constante arbitraire, et faisant $z = k u g_0 \eta$, nous aurons, au moyen des formules (38), les expressions des fonctions symétriques composées avec les quantités z. Écrivons d'abord la seconde

$$(z_0 z_1 z_2)^3 = \frac{k^3\left(1 - \frac{3}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)}{3^3\left(3 - \frac{1}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^3}\left(P + \frac{\lambda}{\varkappa} D\right)^3.$$

Choisissant k par la condition

$$k\left(1 - \frac{3}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\varkappa\left(3 - \frac{1}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right),$$

la formule se réduit à

(39) $$z_0 z_1 z_2 = l P + l_1 P_1,$$

où $l : l_1$ est racine de $V(l, l_1) = 0$. La première formule pourra s'écrire de même

$$(40)\qquad z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = m P + m_1 P_1,$$

et les coefficients constants m, m_1 sont à calculer. La substitution directe donne immédiatement, à cause de l'expression de S,

$$m_1^3 = (6 l_1)^3 \frac{(\omega l - \sigma l_1)^2}{9 l_1^2 (\sigma^2 + \omega \varpi) - (\omega l - \sigma l_1)^2}.$$

Par symétrie, il en résulte une formule analogue pour m^3 : il n'y a qu'à échanger l, l_1 ; ω, ω_1 ; σ, σ_1 et changer le signe de ϖ. Mais ce résultat est insuffisant, car l'une seulement des deux racines cubiques de m^3, m_1^3 peut être arbitrairement choisie : l'autre doit s'en déduire. Pour lever cette difficulté, il suffit de calculer le rapport $m : m_1$, d'après (38).

On trouve ainsi, par substitution directe,

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\omega l^2 - 4 \sigma l l_1 - 3 \varpi l_1^2}{2 l_1 (\sigma l_1 - \omega l)}.$$

En même temps a lieu la formule symétrique

$$\frac{m_1}{m} = \frac{\omega_1 l_1^2 - 4 \sigma_1 l_1 l + 3 \varpi l^2}{2 l (\sigma_1 l - \omega_1 l_1)}.$$

La concordance de ces deux formules se vérifie aisément, en vertu de $V = 0$, et il sera plus simple de les remplacer par l'égalité symétrique

$$\frac{m^2}{m_1^2} = \frac{(\sigma_1 l - \omega_1 l_1) l_1}{(\sigma l_1 - \omega l) l},$$

qui suffit à fixer les rapports des racines cubiques de m^3 et m_1^3. Dans la suite du calcul j'introduirai encore une constante μ qui est exprimée symétriquement ainsi :

$$\mu = \frac{\sigma l_1 - \omega l}{l_1 m_1^2} = \frac{\sigma_1 l - \omega_1 l_1}{l m^2}.$$

Remarquons aussi que la constante k donne lieu à l'égalité

$$\frac{k}{\varkappa\left(3-\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)}=-\frac{m_1}{2\,l_1}.$$

Il en résulte que la troisième équation (38) nous donne, en désignant par $\overline{\psi}$ le coefficient à retenir dans le covariant ψ :

$$z_0^3 z_1^3+z_1^3 z_2^3+z_2^3 z_0^3-\frac{1}{12}(z_0^3+z_1^3+z_2^3)^2=\frac{1}{\omega^2\mu}\overline{\psi}.$$

Il reste à trouver l'expression explicite de $\overline{\psi}$. D'après tout ce qui précède, nous avons d'abord

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}\overline{\psi}=&-\frac{3}{4}\,\frac{2}{3^2}\sum\alpha_{ij}\,a'_{i2}\,a'_{j2}-\frac{1}{4}(2\sigma^3+3\,\omega\,\mathfrak{w}\sigma-\sigma_1\,\omega^2)\,\mathrm{P}^2\\&+\frac{3}{4}(\sigma^2+\omega\mathfrak{w})(\sigma\mathrm{P}+\omega\,\mathrm{P}_1)\mathrm{P}.\end{aligned}\right.$$

La forme A′, à laquelle appartiennent les coefficients a', est égale à $\sigma\mathrm{A}+\omega\mathrm{A}_1$. Il en résulte d'abord

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2}&=\omega^2\,\Sigma\alpha_{ij}\,b_{i2}\,b_{j2}+\tfrac{1}{3}\sigma(\sigma a_{22}+2\omega b_{22})\,\Sigma a_{ij}\,\alpha_{ij}\\&=\omega^2\,\Sigma\alpha_{ij}\,b_{i2}\,b_{j2}+\tfrac{3}{2}\sigma(\sigma\mathrm{P}\ \ +2\omega\mathrm{P}_1)(\sigma\mathrm{P}+\omega\mathrm{P}_1).\end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie sans peine l'égalité

$$\Sigma\alpha_{ij}\,b_{i2}\,b_{j2}=b_{22}\,\Sigma\alpha_{ij}\,b_{ij}-(\alpha_{00}\beta_{11}-2\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{11}\beta_{00}).$$

La quantité

$$\mathrm{Q}=\alpha_{00}\beta_{11}-2\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{11}\beta_{00}$$

va subsister dans la formule définitive. En substituant dans (41) et faisant toutes les réductions dont on peut abréger le calcul par raison de symétrie, on trouve

$$\frac{1}{\omega^2}\overline{\psi}=\tfrac{1}{6}\mathrm{Q}+\tfrac{1}{4}(\sigma\mathrm{P}_1^2+\sigma_1\mathrm{P}^2).$$

Donc enfin nous avons pour dernière formule

$$(42)\quad z_0^3 z_1^3 + z_1^3 z_2^3 + z_3^3 z_0^3 = \frac{1}{\mu}\left[\tfrac{1}{6}Q + \tfrac{1}{4}(\sigma P_1^2 + \sigma_1 P_2)\right] + \tfrac{1}{12}(mP + m_1 P_1)^2.$$

Les égalités (39), (40) et (42) déterminent trois quantités z qui sont respectivement égales à trois quantités $ug_0\eta$, et le problème est complètement achevé.

Pour formuler le plus simplement possible le résultat acquis, faisons les observations suivantes :

1° Si nous prenons les discriminants et les invariants C sans les coefficients numériques qui se sont introduits ici, en écrivant comme il est d'usage

$$D = \tfrac{1}{3}\Sigma a_{ij}\alpha_{ij}, \quad C = \Sigma \alpha_{ij} b_{ij}, \quad \ldots,$$

il faudra mettre $\frac{2}{3}\sigma$, $\frac{2}{3}\omega$, ... à la place de σ, ω. Ce changement ne modifie en rien l, l_1, m, m_1. Il faut seulement remplacer μ par $\frac{2}{3}\mu$.

2° Si, au lieu d'opérer sur A et A_1, on opère sur ρA et ρA_1 (ρ étant une fonction quelconque), D, C sont remplacés par $\rho^3 D$, $\rho^3 C$, ... et Q par $\rho^4 Q$. On pourra conserver les formules précédentes en changeant seulement Q, si l'on change en même temps les quantités z. Je ferai un tel changement dans l'énoncé en prenant $\rho = \frac{1}{u^3 g_0}$, de façon que le calcul porte sur les multiplicateurs eux-mêmes. Voici le résultat final.

40. Problème. — *Intégrer l'équation*

$$\Gamma(\eta) = \gamma_0\eta''' + 3\gamma_1\eta'' + 3\gamma_2\eta' + \gamma_3\eta = 0,$$

sachant qu'une forme cubique ternaire, composée avec trois solutions η, et à coefficients constants, a pour expression $\varphi(x)$.

Solution. — *On prendra la fonction adjointe* $G(y)$ *et, par les formules* (32), *on calculera un multiplicateur* M *du second degré pour* $G(y)$, *avec* $3\gamma_0^2\varphi(x)$ *pour coefficient de* y''^2. *Soit* M *ce multiplicateur*

$$M = \Sigma a_{ij} y^{(i)} y^{(j)}, \quad a_{22} = 3\gamma_0^2\varphi(x) = P.$$

Ce multiplicateur a un conjugué M_1

$$M_1 = \Sigma b_{ij} y^{(i)} y^{(j)}, \quad b_{22} = 3\gamma_0^2 \varphi_1(x) = P_1,$$

jouissant des propriétés suivantes :

Si l'on désigne par α, β *les coefficients des formes adjointes à* M, M_1

$$\alpha_{00} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad \alpha_{01} = a_{02} a_{12} - a_{01} a_{22}, \quad \ldots,$$

et qu'on prenne les invariants

$$D = \tfrac{1}{3} \Sigma a_{ij} \alpha_{ij}, \quad C = \Sigma b_{ij} \alpha_{ij}, \quad C_1 = \Sigma a_{ij} \beta_{ij}, \quad D_1 = \tfrac{1}{3} \Sigma b_{ij} \beta_{ij},$$

on aura entre ces quantités les relations suivantes où σ, ω, ϖ, ... *désignent des constantes*

$$\begin{aligned} aD &= \sigma P + \omega P_1, & aD_1 &= \sigma_1 P_1 + \omega_1 P, \\ \tfrac{1}{3} aC &= \varpi P - \sigma P_1, & \tfrac{1}{3} aC_1 &= -\varpi P_1 - \sigma_1 P. \end{aligned}$$

La quantité a *sera égale à* $\frac{1}{\gamma_0^4} e^{6\int \frac{\gamma_1}{\gamma_2} dx}$ *et les coefficients constants satisferont à la relation*

$$(43) \qquad \omega\omega_1 - 4\sigma\sigma_1 = 3\varpi^2.$$

On obtiendra donc le conjugué M_1 *en calculant le discriminant* D *de* M, *et prenant pour source* P_1 *une fonction arbitraire du faisceau* (aD, P).

On calculera, en outre, la fonction

$$Q = \alpha_{00} \beta_{11} - 2\alpha_{01} \beta_{01} + \alpha_{11} \beta_{00}.$$

On prendra une racine $l : l_1$ *de l'équation, à coefficients constants,*

$$\omega l^4 - 4\sigma l^3 l_1 - 6\varpi l^2 l_1^2 + 4\sigma_1 l l_1^3 - \omega_1 l_1^4 = 0,$$

et deux autres constantes m, m_1 *déterminées par les relations concor-*

dantes

$$m = 6l\left[\frac{(\omega_1 l_1 - \sigma_1 l)^2}{9l^2(\sigma_1^2 - \omega_1 w) - (\omega_1 l_1 - \sigma_1 l)^2}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$m_1 = 6l_1\left[\frac{(\omega l - \sigma l_1)^2}{9l_1^2(\sigma^2 + \omega w) - (\omega l - \sigma l_1)^2}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{m^2}{m_1^2} = \frac{(\sigma_1 l - \omega_1 l_1)l}{(\sigma l_1 - \omega l)l_1},$$

et enfin une dernière constante μ.

$$\mu = \frac{\sigma l_1 - \omega l}{l_1 m_1^2} = \frac{\sigma_1 l - \omega_1 l_1}{l m^2}.$$

En fonction de ces diverses quantités, on aura trois solutions η *de l'équation proposée, au moyen des racines de l'équation algébrique*

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_0^6\eta^9 - (mP + m_1P_1)\gamma_0^4\eta^6 \\ &\quad + \left[\frac{Qa}{4\mu} + \frac{1}{4\mu}(\sigma P_1^2 + \sigma_1 P^2) + \frac{1}{12}(mP + m_1P_1)^2\right]\gamma_0^2\eta^3 \\ &\qquad\qquad - (lP + l_1P_1)^3 = 0. \end{aligned}\right.$$

Application.

41. La solution qui vient d'être exposée n'est pas en défaut dans le cas où $\varphi(x)$ est identiquement nul. C'est à ce cas particulier que se rapporte l'application numérique suivante :

Intégrer l'équation

$$\psi\eta''' + \tfrac{3}{2}\psi'\eta'' + \tfrac{4}{9}\psi''\eta' - \tfrac{1}{81}\psi'''\eta = 0,$$

où ψ *désigne un polynôme du troisième degré*

$$\psi = \psi_0 x^3 + 3\psi_1 x^2 + 3\psi_2 x + \psi_3,$$

sachant qu'il existe entre trois solutions η *une relation homogène du troisième degré, à coefficients constants.*

L'adjointe est ici

$$G(y) = \psi y''' + \tfrac{3}{2}\psi' y'' + \tfrac{4}{9}\psi'' y' - \tfrac{7}{162}\psi''' y.$$

On pourra aisément, par les équations (32), vérifier le multiplicateur ayant les coefficients suivants :

$$p = 0, \quad q = \psi, \quad r = \tfrac{1}{6}\psi'', \quad h = 0, \quad l = -2\psi, \quad m = -\psi',$$
$$M = \psi y'^2 + \tfrac{1}{6}\psi'' y^2 - 4\psi y y'' - 2\psi' y y'.$$

Le discriminant de M est $-4\psi^3$; la quantité a est égale à $\frac{1}{\psi}$. Les multiplicateurs conjugués ont donc, pour coefficient de y''^2, la quantité ψ^2.

Voici les coefficients de l'un de ces multiplicateurs :

$$p = 3\psi^2, \quad q = \tfrac{3}{4}\psi'^2 - \tfrac{1}{72}\psi\psi'', \quad r = \frac{\psi''^2}{2^4 . 3^2} - \frac{\psi'\psi'''}{2^3 . 3^4},$$
$$h = \tfrac{3}{2}\psi\psi', \quad l = -\tfrac{5}{36}\psi\psi'', \qquad m = \frac{\psi\psi'''}{2^3 . 3^3} - \frac{5\psi'\psi''}{2^3 . 3^2}.$$

On peut abréger les calculs en écrivant les deux multiplicateurs ainsi :

$$M = \psi y'^2 + \tfrac{1}{6}\psi'' y^2 - 4(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y') y,$$
$$M_1 = 3(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y')^2 - \tfrac{1}{72}\psi\psi'' y'^2 + \tfrac{1}{72}\left(\frac{\psi''^2}{2} - \frac{\psi'\psi'''}{9}\right) y^2$$
$$- \tfrac{5}{18}(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y')\psi'' y + \frac{\psi\psi'''}{2^2 . 3^3} y y'.$$

En faisant alors

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\psi'}{\psi} y' = x_2, \quad y' = x_1, \quad y = x_0,$$

on n'altère pas les formes qu'il faut calculer, et l'on opère sur des

coefficients plus simples :

$$a_{22} = 0, \qquad a_{11} = \psi, \qquad a_{00} = \psi'',$$
$$a_{12} = 0, \qquad a_{02} = -2\psi, \qquad a_{01} = 0,$$
$$\alpha_{22} = \tfrac{1}{6}\psi\psi'', \quad \alpha_{11} = -4\psi^2, \quad \alpha_{00} = 0,$$
$$\alpha_{12} = 0, \qquad \alpha_{02} = 2\psi^2, \qquad \alpha_{01} = 0,$$
$$b_{22} = 3\psi^2, \quad b_{11} = -\frac{\psi\psi''}{72}, \quad b_{00} = \frac{1}{72}\left(\frac{\psi''^2}{2} - \frac{\psi'\psi'''}{9}\right),$$
$$b_{12} = 0, \qquad b_{02} = -\frac{5\psi\psi''}{18}, \quad b_{01} = \frac{\psi\psi''}{2^3.3^3}.$$

Parmi les coefficients β, quatre seulement sont nécessaires :

$$\beta_{11} = \frac{1}{2^3.3^3}\left(\frac{\psi^2\psi''^2}{3} - \psi^2\psi'\psi'''\right), \quad \beta_{00} = -\tfrac{1}{24}\psi^3\psi'',$$
$$\beta_{02} = \frac{5}{2^5.3^4}\psi^2\psi''^2, \qquad \beta_{01} = -\tfrac{1}{72}\psi^3\psi''',$$

$$D_1 = a_{22}\alpha_{22} + a_{21}\alpha_{21} + a_{20}\alpha_{20} = -4\psi^3,$$
$$D_1 = b_{02}\beta_{02} + b_{01}\beta_{01} + b_{00}\beta_{00} = \frac{\psi^3}{2^6 3^6}(3\psi'\psi''\psi''' - \psi''^3 - 3\psi\psi'''^2)$$
$$= \frac{\psi^3}{2^4.3^3}(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3),$$
$$C = \alpha_{ij}b_{ij} = 0,$$
$$C_1 = \Sigma a_{ij}\beta_{ij} = \frac{\psi^3}{2^4 3^3}(\psi''^2 - 2\psi'\psi''') = \frac{\psi^3}{2^2.3}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2),$$
$$Q = \alpha_{00}\beta_{11} - 2\alpha_{01}\beta_{01} + \alpha_{11}\beta_{00} = \tfrac{1}{6}\psi^3\psi''.$$

On a, d'ailleurs,

$$a = \frac{1}{\psi}, \quad P = 0, \quad P_1 = 3\psi^2.$$

Il en résulte

$$\omega = -\tfrac{1}{3}, \quad \sigma = 0,$$
$$\sigma_1 = \frac{1}{2^4\ 3^4}\left(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3\right), \quad \varpi = \frac{1}{2^2.3^3}\left(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2\right),$$

et, d'après (43),

$$\omega_1 = -\frac{1}{2^6.3^4}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)^2.$$

Si l'on fait $l_1 = 12$, $l = \psi_0 t + \psi_1$, l'équation $V(l, l_1) = 0$ se change en celle-ci :

$$(45) \qquad \psi_0 t^4 + 4\psi_1 t^3 + 6\psi_2 t^2 + 4\psi_3 t + \frac{4\psi_1\psi_3 - 3\psi_2^2}{\psi_0} = 0,$$

dont la forme est remarquable ; son premier membre a pour dérivée $\psi(t)$.

On trouve ensuite

$$\left(\frac{6 l_1}{m_1}\right)^3 = -1 + \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2}, \quad \frac{1}{\mu m_1^2} = -\frac{l_1}{\omega l} = \frac{9}{\psi_0 t + \psi_1}.$$

Changeant η^3 en $m_1\eta^3$, et divisant tous les termes de (44) par ψ^6, il reste

$$(46) \quad \eta^9 - 6\eta^6 + 3\left(3\,\frac{\psi_0 x + \psi_1}{\psi_0 t + \psi_1} + 1\right)\eta^3 + 1 - \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} = 0.$$

Trois solutions η sont données par l'équation (46), *où t est une racine quelconque de* (45).

Le dernier terme de (46) peut s'écrire encore d'une autre manière :

$$(47) \qquad 1 - \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} = \frac{3\psi_0\psi'(t)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} - 8.$$

c'est ce qu'on voit immédiatement par l'égalité

$$\psi''^2 - 2\psi'\psi''' = 36(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2).$$

Digression sur une équation du troisième ordre.

42. Je vais entreprendre maintenant un calcul dont le but est de vérifier cette solution, puis de faire connaître les propriétés d'une classe d'équations à laquelle appartient celle que je viens d'intégrer.

Pour abréger l'écriture, je mettrai partout dans ce qui suit :

$$\eta_0^3 = z_0, \quad \eta_1^3 = z_1, \quad \eta_2^3 = z_2.$$

J'envisage ces trois quantités z déterminées par (46), en sorte que, posant

$$3S_1 = z_0 + z_1 + z_2, \quad 3S_2 = z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_0, \quad S_3 = z_0 z_1 z_2,$$

on ait pour définition des z

$$(48) \qquad S_1 = 2, \quad S_2 = \frac{3\psi''(x)}{\psi''(t)} + 1, \quad S_3 = 8 - \frac{18\psi'''\psi'(t)}{\psi''(t)^2},$$

où t est une racine de (45).

La première partie du calcul suivant a pour but d'exprimer $\psi(x)$ en fonction des z. A cet effet, je calcule d'abord les deux quantités

$$(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2) \quad \text{et} \quad (3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3).$$

Les expressions de S_2 et S_1 me donnent, sous forme homogène,

$$(49) \qquad \psi'''\psi'(t) = \frac{\psi''(t)^2}{18}(S_1^3 - S_3).$$

Observons maintenant que l'équation (45) peut s'écrire

$$(50) \qquad \psi''(t)\psi(t) - \tfrac{1}{2}\psi'(t)^2 = 0,$$

comme on peut le vérifier sans calcul, grâce à cette propriété que les premiers membres possèdent, de reproduire $\psi(t)$ par une dérivation. D'après (50), on peut transformer (49) en cette autre :

$$(51) \qquad 3\psi'''^2\psi(t) = \frac{\psi''(t)^3}{2^3 \cdot 3^3}(S_1^3 - S_3)^2.$$

Prenant les expressions (49) et (51) de $\psi'''\psi'(t)$ et de $\psi'''^2\psi(t)$ pour les substituer dans l'identité

$$(52) \quad 3\psi'''^2\psi(t) + \psi''^3(t) - 3\psi'(t)\psi''(t)\psi''' = 2^2 \cdot 3^3(\psi_0^2\psi_3 + 2\psi_1^3 - 3\psi_0\psi_1\psi_2),$$

nous trouvons ce résultat

$$2^8 3^6 \frac{\psi_0^2\psi_3 + 2\psi_1^3 - 3\psi_0\psi_1\psi_2}{\psi''(t)^3} = S_3^2 + \tfrac{5}{2}S_3 S_1^3 - \tfrac{1}{8}S_1^6.$$

D'autre part, suivant (47) et (48), nous avons aussi

$$2^5 . 3^4 \frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{\psi''(t)^2} = S_1^3 + 8S_3.$$

L'expression de S_2 nous donne $\psi''(x)$ qui, sous forme homogène, sera

(53) $$\psi''(x) = \frac{4S_2 - S_1^2}{12}\psi''(t).$$

L'identité

$$\psi''^2(x) - 2\psi'''\psi'(x) = 2^2 . 3^2(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)$$

donne $\psi'(x)$, et enfin l'identité (52), où l'on mettra x au lieu de t, donnera $\psi(x)$. Son expression, rendue homogène, prend la forme

$$\psi(x) = \frac{\psi''(t)^3}{2^3 . 3^4}(4S_2^3 - 3S_2^2 S_1^2 + 4S_3 S_1^3 - 6S_1 S_2 S_3 + S_3^2);$$

la parenthèse contient le discriminant de $(z^3 - 3S_1 z^2 + 3S_2 z - S_3)$; par suite,

(54) $$\psi(x) = -\frac{\psi''(t)^3}{2^3 . 3^7}[(z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)]^2.$$

Remarquons, en passant, que cette expression simple du discriminant conduit, pour la résolution de l'équation du troisième degré (46), suivant la méthode usitée, à un résultat peu compliqué que voici :

$$\eta^3 = 2 + A + B,$$

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left[1 + \frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} - 2\frac{\psi_0 x + \psi_1}{\psi_0 t + \psi_1}\right] \pm 3\sqrt[2]{\frac{3\psi_0\psi(x)}{(\psi_0 t + \psi_1)^3}}},$$

où les deux racines cubiques doivent être extraites de manière que $A + B$ reste fini pour x infini.

45. En différentiant les équations (48), nous avons

$$z_0\frac{\eta_0'}{\eta_0}+z_1\frac{\eta_1'}{\eta_1}+z_2\frac{\eta_2'}{\eta_2}=0,$$

$$z_0(z_1+z_2)\frac{\eta_0'}{\eta_0}+z_1(z_2+z_0)\frac{\eta_1'}{\eta_1}+z_2(z_0+z_1)\frac{\eta_2'}{\eta_2}=-\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1},$$

$$\frac{\eta_0'}{\eta_0}+\frac{\eta_1'}{\eta_1}+\frac{\eta_2'}{\eta_2}=0.$$

Le déterminant de ces équations aux inconnues $\frac{\eta_i'}{\eta_i}$ est la racine carrée R du discriminant

$$(55)\qquad R=(z_0-z_1)(z_1-z_2)(z_2-z_0)=2.3^3\left[-\frac{\psi_0^2\psi(x)}{(\psi_0 t+\psi_1)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

comme on vient de le trouver. Les inconnues s'expriment ainsi :

$$\frac{\eta_0'}{\eta_0}=\frac{1}{R}\,\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}(z_1-z_2);$$

les autres formules se déduisent par permutation circulaire sur les indices 0, 1, 2.

Soit Y une fonction quelconque de η_i; sa dérivée par rapport à x sera donnée par l'égalité

$$(56)\quad RY'=\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}\left[Y_0\eta_0(z_1-z_2)+Y_1\eta_1(z_2-z_0)+Y_2\eta_2(z_0-z_1)\right],$$

$$Y_0=\frac{\partial Y}{\partial\eta_0},\quad Y_1=\frac{\partial Y}{\partial\eta_1},\quad Y_2=\frac{\partial Y}{\partial\eta_2}.$$

En prenant deux fois de suite la dérivée de la même manière, on obtient une égalité de cette forme

$$R[R(RY')']'=\left(\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}\right)^3 L,$$

où L contient seulement les lettres η, z et les dérivées partielles de Y; son expression sera écrite plus loin. Si maintenant on tient compte de (55) qui donne, à un facteur constant près, $\psi(x)^{\frac{1}{2}}$ pour R, on a

facilement, au lieu de la dernière égalité,

$$\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + \tfrac{1}{2}\psi'' Y' = -\frac{1}{2^3.3^6}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} L.$$

En vertu de (53) et (56), nous avons semblablement une égalité de la forme

$$\psi'' Y' = \frac{1}{2^2.3^4}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} M$$

et, d'après (55),

$$\psi''' Y = \frac{1}{3^2}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} R.$$

De là résulte

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + (\tfrac{1}{2} + \alpha)\psi'' Y' + \beta\psi''' Y \\ &\quad = -\frac{1}{9}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}}(L - 18\alpha M - 2^3.3^4.\beta R Y). \end{aligned}\right.$$

La quantité L provient de l'opération

$$\eta_0(z_1 - z_2)\frac{\partial}{\partial\eta_0} + \eta_1(z_2 - z_0)\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \eta_2(z_0 - z_1)\frac{\partial}{\partial\eta_2},$$

répétée trois fois de suite. Elle se compose de trois parties suivant l'ordre des dérivées partielles qui y figurent. Dénotant ces dérivées par des indices et écrivant seulement le type de chaque sorte de terme, nous aurons

$$L = L_3 + L_2 + L_1,$$

$$L_3 = \left\{\begin{aligned} &Y_{000}\eta_0^3(z_1 - z_2)^3 \\ &+ 3Y_{001}\eta_0^2\eta_1(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0) \\ &+ 3Y_{011}\eta_0\eta_1^2(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)^2 \\ &+ 6Y_{012}\eta_0\eta_1\eta_2(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)(z_0 - z_1) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ 6 \text{ autres termes} \\ &\text{par permutation des indices,} \end{aligned}$$

$$L_2 = \left\{\begin{aligned} &3Y_{00}\eta_0^2(z_1 - z_2)[(z_1 - z_2)^2 + 3(2z_1z_2 - z_1z_0 - z_2z_0)] \\ &- 3Y_{12}\eta_1\eta_2[(z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0) \\ &\qquad + 3(z_1 - z_2)(3z_0^2 - z_0z_1 - z_1z_2 - z_2z_0)] \end{aligned}\right\} + 4 \text{ autres termes},$$

$$L_1 = Y_0\eta_0[(z_1 - z_2)^3 + 9(z_1 - z_2)(z_0^2 - 2z_0z_1 - 2z_0z_1)] + 2 \text{ autres termes},$$

La quantité M est simplement

$$M = Y_0 \eta_0 (z_1 - z_0)[10(z_1 z_2 + z_2 z_0 + z_0 z_1) - z_0^2 - z_1^2 - z_2^2] + 2 \text{ termes}.$$

Enfin R est déjà connu. On vérifiera sans peine, en formant le coefficient de Y_0, l'identité

$$L_1 + M + 8R(Y_0\eta_0 + Y_1\eta_1 + Y_2\eta_2) = 0,$$

d'après laquelle la parenthèse du second membre de (57) pourra s'écrire

$$L_3 + L_2 - (18\alpha + 1)M - 8(81\beta Y + Y_0\eta_0 + Y_1\eta_1 + Y_2\eta_2)R.$$

Si l'on suppose $Y = c_0\eta_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2$, où les c sont des constantes arbitraires, et, en outre, $\alpha = -\frac{1}{18}$, $\beta = -\frac{1}{81}$, cette quantité sera nulle. Quant au premier membre de (57), il devient

$$\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + \tfrac{4}{9}\psi'' Y' - \tfrac{1}{81}\psi''' Y;$$

c'est précisément celui de l'équation différentielle dont nous étions partis d'abord. *La solution de cette équation est ainsi vérifiée.*

44. Je vais maintenant envisager une équation plus générale. Je ferai

$$\alpha = -\frac{n^2}{18}, \quad \beta = -\frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2.3^4},$$

et le premier membre de (57) prendra la forme

$$G(Y) = \psi Y''' + \frac{3}{2}\psi' Y'' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{9}\right)\psi'' Y' - \frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2.3^4}\psi''' Y.$$

Supposant, en outre, que Y soit une fonction homogène en η_0, η_1, η_2, et du degré $(4n-3)$, j'aurai, à cause de cette homogénéité,

$$G(Y) = -\frac{1}{9}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}}[L_3 + L_2 + (n^2 - 1)M + 2(n-1)(n+4)R(Y_0\eta_0 + Y_1\eta_1 + Y_2\eta_2)].$$

L'équation aux dérivées partielles, obtenue ici comme transformée de $G = 0$, peut revêtir des formes diverses à cause de l'homogénéité attribuée à Y. Pour reconnaître l'identité de deux formes, d'apparence différente, le plus simple est de les ramener toutes deux à ne contenir que des dérivées du troisième ordre par le moyen des égalités

$$(4n-5)(4n-4)Y_i = Y_{00i}\eta_0^2 + 2Y_{12i}\eta_1\eta_2 + \ldots,$$
$$(4n-5)Y_{ij} = Y_{0ij}\eta_0 + \ldots.$$

Le premier membre étant écrit sous l'une ou l'autre des formes symboliques

$$U = [\Sigma A_i\eta_i Y_i]^{(3)} + [\Sigma B_i\eta_i Y_i]^{(2)} + (n-1)\Sigma C_i\eta_i Y_i,$$
$$4(4n-5)U = [\Sigma P_i\eta_i Y_i]^{(3)},$$

on aura

$$(58)\quad \begin{cases} P_{000} = 4(4n-5)A_{000} + 4B_{00} + C_0, \\ P_{001} = 4(4n-5)A_{001} + \frac{4}{3}(B_{00} + 2B_{01}) + \frac{1}{3}(2C_0 + C_1), \\ P_{012} = 4(4n-5)A_{012} + \frac{4}{3}(B_{01} + B_{12} + B_{20}) + \frac{1}{3}(C_0 + C_1 + C_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mettons, pour les coefficients A, B, C, ceux de la forme ci-dessus, en observant que les derniers peuvent s'écrire ainsi

$$C_0 = (n+1)\gamma_0 + 2(n+4)R,$$

où γ_0 est le coefficient de $Y_0\eta_0$ dans M. Prenons maintenant les nouveaux coefficients suivants :

$$A'_{000} = A_{000} + \frac{R}{8} + \frac{\gamma_0}{16},$$

$$A'_{001} = A_{001} + \frac{R}{8} + \frac{1}{16}\,\frac{2\gamma_0 + \gamma_1}{3},$$

$$A'_{012} = A_{012} + \frac{R}{8} + \frac{1}{16}\,\frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{3};$$

$$B'_{00} = B_{00} + \frac{21}{8}R + \frac{9}{16}\gamma_0,$$

$$B'_{01} = B_{01} + \frac{21}{8}R + \frac{9}{16}\,\frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2};$$

$$C'_0 = 0.$$

En mettant ces coefficients A', B', C' dans (58), au lieu de A, B, C, on trouve les mêmes quantités P. *Nous avons donc, pour transformée de* $G(Y) = 0$, *cette équation* (écrite symboliquement)

$$(59) \qquad [\Sigma A'_i \eta_i Y_i]^{(3)} + [\Sigma B'_i \eta_i Y_i]^{(2)} = 0,$$

dans les coefficients de laquelle la constante n *a disparu.*

Voici quels sont les coefficients, en mettant, pour abréger,

$$R = (z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_3),$$

$$S = 10(z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_0) - (z_0^2 + z_1^2 + z_2^2);$$

$$A'_{000} = (z_1 - z_2)^3 + \frac{R}{8} + \frac{S}{16}(z_1 - z_2),$$

$$A'_{001} = (z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0) + \frac{R}{8} + \frac{S}{16}\,\frac{2z_1 - z_2 - z_0}{3},$$

$$A'_{011} = (z_1 - z_2)(z_2 - z_0)^2 + \frac{R}{8} - \frac{S}{16}\,\frac{2z_0 - z_2 - z_1}{3},$$

$$A'_{012} = \tfrac{9}{8}R;$$

$$B'_{00} = 3(z_1 - z_2)^3 + 9(z_1 - z_2)(2z_1 z_2 - z_1 z_0 - z_2 z_0) + \tfrac{21}{8}R + \tfrac{9}{16}S(z_1 - z_2),$$

$$B'_{01} = -\tfrac{9}{2}(z_0 - z_1)(3z_2^2 - z_0 z_1 - z_0 z_2 - z_1 z_2) + \tfrac{9}{8}R - \tfrac{9}{32}S(z_0 - z_1).$$

Il faut avoir soin d'observer que les autres coefficients se déduisent des précédents par permutation circulaire des indices, en sorte que l'échange de deux indices produit un changement des signes. Ainsi, en échangeant les indices 0, 1, on change A'_{011} en $-A'_{001}$, B'_{01} en $-B'_{01}$, etc.

45. L'équation (59) jouit de la propriété suivante : *elle admet pour solutions une infinité de polynômes entiers par rapport aux variables* η.

Soit n *un entier quelconque, positif et premier avec* 3 : *il existe trois de ces polynômes, ayant pour degré* $4n - 3$. *Si* n *est multiple de* 3, *plus* 1, *ces trois polynômes ont les formes*

$$\eta_0 F(z_0, z_1, z_2), \quad \eta_1 F(z_1, z_2, z_0), \quad \eta_2 F(z_2, z_0, z_1),$$

où F *est un polynôme entier du degré* $\frac{4(n-1)}{3}$, *symétrique par rapport aux deux dernières lettres. Si* n *est multiple de* 3, *plus* 2, *les formes sont* $\eta_0^2 F(z_0, z_1, z_2), \ldots$, *où* F *est du degré* $\frac{4n-5}{3}$ *et jouit de la même symétrie.*

Par conséquent, l'*équation*

$$(60) \quad \psi Y''' + \frac{3}{2}\psi' Y'' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{9}\right)\psi'' Y' - \frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2 . 3^4}\psi''' Y = 0,$$

où ψ *est un polynôme du troisième degré, et* n *un entier, premier avec* 3, *est intégrable algébriquement* (on va voir dans un instant que n peut être négatif).

Cette proposition me semble difficile à établir sur l'équation (60) elle-même. Je l'ai démontrée dans mon *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* (¹) à propos de l'équation qui se déduit de (60), quand on prend, pour variable indépendante, l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{\psi}}$. La théorie des fonctions elliptiques fournit, pour cet objet, des procédés très faciles. Mais la proposition admise, on a, par l'équation (59), un moyen assez simple de déterminer le polynôme F dans chaque cas particulier. Il suffit, en effet, en substituant l'intégrale à coefficients indéterminés, de prendre un petit nombre de termes pour déterminer les coefficients. De plus, si l'on substitue $\eta_0 F$ ou $\eta_0^2 F$, suivant le cas, dans le premier membre de (59), le résultat contient le facteur

$$\eta_0(z_1 - z_2) \quad \text{ou} \quad \eta_0^2(z_1 - z_2),$$

et, ce facteur supprimé, il reste un polynôme entier par rapport aux z seulement, symétrique en z_1, z_2. J'ai vérifié de cette manière et par un calcul très rapide, pour le cas $n = 2$, la solution

$$Y = \eta_0^2(z_0 - 5z_1 - 5z_2),$$

trouvée autrement dans le Mémoire cité; j'ai calculé encore cette autre,

---

(¹) Page 291.

pour $n = 4$,

$$Y = \eta_0 z_0 \Big[\frac{z_0^3}{13} + 3 z_0 (z_1 + z_2) - 15 z_0 (z_1^2 + z_2^2) + 24 z_0 z_1 z_2 + 7 (z_1 + z_2)^3 \Big].$$

46. L'équation (1) se change en son adjointe quand on change n en $-n$; si l'on appelle Y, Z deux solutions de (10), on aura une solution $\mathfrak{Y}$ de l'adjointe ainsi

$$\mathfrak{Y} = \psi^{\frac{1}{2}}(YZ' - ZY').$$

Si maintenant on tient compte de ce que $\psi^{\frac{1}{2}}$ diffère de R seulement par un facteur constant, et que l'on fasse usage de la formule (56), on reconnaîtra l'exactitude de l'énoncé suivant :

L'équation (59) *admet encore une infinité de solutions rationnelles, d'une seconde forme, comme il suit : soient* Z, T *deux des polynômes, de la première forme, et du même degré* $4n - 3$, *on en déduira la solution*

$$Y = \frac{\Big| \eta_0\eta_1(2z_2 - z_0 - z_1)(Z_0T_1 - Z_1T_0) + \eta_1\eta_2(2z_0 - z_1 - z_2)(Z_1T_2 - Z_2T_1) + \eta_2\eta_0(2z_1 - z_2 - z_0)(Z_2T_0 - Z_0T_2) \Big|}{(z_0 + z_1 + z_2)^{4n}}.$$

Cette équation Y *est aussi une solution de l'équation* (60) *quand on y a changé* n *en* $-n$, *et que l'on considère les* η *comme exprimés en* x *par le moyen des relations* (48). On peut alors supprimer le dénominateur de Y, qui est une constante.

D'après la forme de la solution ainsi trouvée pour l'équation différentielle (60), dans laquelle n est entier, positif ou négatif, et premier avec 3, il est manifeste que le produit des trois solutions particulières envisagées est fonction entière de x. Ainsi *cette équation a toujours des multiplicateurs quadratiques à coefficients entiers.*

CONCLUSION.

Si l'on voulait poursuivre la série naturelle de ces recherches, soit sur les équations du troisième ordre, soit sur les équations d'ordre su-

périeur, on rencontrerait la circonstance déjà signalée pour les équations du second ordre au n° **29** de ce Mémoire. Les formes ternaires, au-dessus du troisième degré, admettent, suivant la parité de leur degré, des covariants rationnels, soit linéaires, soit quadratiques, et les formes quaternaires présentent la même circonstance pour le troisième degré inclusivement. C'est donc seulement par la théorie des formes singulières que l'on pourra trouver de nouveaux exemples d'équations différentielles intégrables algébriquement et cependant irréductibles. Ainsi, malgré l'apparente étendue du sujet proposé en tête du présent Mémoire, une fois les formes quadratiques exclues, si l'on met de côté aussi les formes singulières, dont les covariants linéaires ou quadratiques sont identiquement nuls, on n'a pas d'autres cas à traiter que ceux mêmes dont l'étude vient d'être faite. Quant au problème concernant les formes quadratiques, j'ai l'intention de le traiter dans un autre Mémoire.

Sur les fonctions hyperabéliennes;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans des études précédentes (*Acta mathematica*, t. I, II et IV), j'ai déjà indiqué une première généralisation des fonctions abéliennes de deux variables indépendantes : ce sont les fonctions *hyperfuchsiennes*. A ces fonctions des deux variables x et y est attaché un groupe discontinu de substitutions de la forme

$$\left(x,\ y,\ \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3},\ \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}\right).$$

La généralisation peut se poursuivre dans une autre direction, et j'ai été amené à étudier des fonctions uniformes de deux variables indépendantes x et y, qui ne changent pas quand on effectue sur ces variables un groupe de substitutions de la forme

$$(1)\qquad \left(x,\ y,\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right).$$

Comme on le voit, x et y se trouvent remplacés respectivement par des fonctions de x et y seulement, mais ces substitutions doivent se faire simultanément. Dans le cas où les deux substitutions

$$(2)\qquad \left(x,\ \frac{ax+b}{cx+d}\right) \quad \text{et} \quad \left(y,\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$

relatives respectivement à x et à y, forment des groupes discontinus, les fonctions de x et y, invariables par les substitutions du groupe (1), se ramènent aux fonctions fuchsiennes de M. Poincaré, mais il n'en est plus ainsi si les groupes (2), pris séparément, sont continus, leur ensemble, représenté par les substitutions (1), étant toutefois, bien entendu, discontinu par rapport à un système de valeurs de x et y.

D'une manière plus générale, nous allons avoir à considérer des groupes dont les substitutions sont de l'une et l'autre forme

$$\left(x,\ y,\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$
$$\left(x,\ y,\ \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},\ \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right).$$

Quand un tel groupe sera *discontinu* pour un certain domaine de valeurs de x et y, nous dirons que c'est un *groupe hyperabélien*.

C'est l'examen d'un cas particulier, concernant la théorie des fonctions abéliennes du second genre qui m'a donné le premier exemple d'un groupe hyperabélien ; j'indique dans le quatrième Chapitre ce cas particulier, dont je compte faire ultérieurement une étude plus complète.

Le premier Chapitre est consacré à une classe étendue de groupes hyperabéliens, qui se présente dans l'étude arithmétique des formes quadratiques quaternaires réelles à coefficients entiers, quand elles sont réductibles au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Je montre qu'à chacune de ces formes correspond un groupe hyperabélien, dont on peut trouver les substitutions fondamentales.

Le Chapitre II est consacré à des considérations générales sur les groupes hyperabéliens, particulièrement quand toutes leurs substitutions sont de la forme (1). La loi de génération de ces groupes peut s'obtenir par une méthode analogue à celle dont M. Poincaré a fait usage dans ses célèbres recherches sur les groupes fuchsiens. L'étude du domaine fondamental au point de vue de la Géométrie de situation termine ces généralités.

Dans la troisième Partie, je m'occupe des fonctions hyperabéliennes

relatives à un groupe donné. Cette étude difficile, dont je ne fais que tracer ici les premières lignes, est étroitement liée à l'importante notion du genre dans la théorie des surfaces algébriques.

CHAPITRE I.

1. Considérons une forme quadratique quaternaire indéfinie dont les coefficients soient des nombres entiers réels, et dont le discriminant soit différent de zéro; elle sera réductible à l'un ou l'autre des types

$$\pm(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2),$$
$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

où les u sont des fonctions linéaires réelles des quatre indéterminées x_1, x_2, x_3 et x_4. Nous laissons de côté les formes du premier type et nous poserons

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \\ & + 2b_{12} x_1 x_2 + 2b_{13} x_1 x_3 + 2b_{14} x_1 x_4 \\ & + 2b_{23} x_2 x_3 + 2b_{24} x_2 x_4 + 2b_{34} x_3 x_4, \end{aligned}$$

les a et les b étant des entiers.

Conformément à la méthode générale de M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), nous devons associer à la forme f une forme définie convenable renfermant un certain nombre de paramètres arbitraires.

Nous avons d'abord à envisager la substitution la plus générale

$$(1)\quad \begin{cases} U_1 = M_1 u_1 + P_1 u_2 + Q_1 u_3 + R_1 u_4, \\ U_2 = M_2 u_1 + P_2 u_2 + Q_2 u_3 + R_2 u_4, \\ U_3 = M_3 u_1 + P_3 u_2 + Q_3 u_3 + R_3 u_4, \\ U_4 = M_4 u_1 + P_4 u_2 + Q_4 u_3 + R_4 u_4, \end{cases}$$

transformant en elle-même

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

On obtient ainsi un système de dix relations entre les (M, P, Q, R). De ces dix relations, j'en écrirai seulement trois, qui seules nous serviront dans la suite; ce sont

$$(2)\quad \begin{cases} M_3^2 + P_3^2 - Q_3^2 - R_3^2 = -1, \\ M_4^2 + P_4^2 - Q_4^2 - R_4^2 = -1, \\ M_3 M_4 + P_3 P_4 - Q_3 Q_4 - R_3 R_4 = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, associons à la forme indéfinie f la forme définie

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$

où les U représentent les expressions (1).

Nous pouvons écrire

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2 + 2U_3^2 + 2U_4^2,$$

ou

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2(M_3 u_1 + P_3 u_2 + Q_3 u_3 + R_3 u_4)^2 + 2(M_4 u_1 + P_4 u_2 + Q_4 u_3 + R_4 u_4)^2,$$

et sous cette dernière forme, on voit que φ ne dépend que des huit paramètres M_3, P_3, Q_3, R_3 et M_4, P_4, Q_4, R_4, liés par les trois relations (2).

Faisons encore la remarque facile à vérifier, qu'à tout système de valeurs de ces huit paramètres, satisfaisant aux équations (2), correspondent des substitutions (1).

2. Entre les coefficients de la forme f et ceux de la forme φ existent diverses inégalités, qu'il est utile d'indiquer. Les u étant des expressions linéaires et homogènes en x_1, x_2, x_3 et x_4, φ est une forme quadratique homogène en x_1, x_2, x_3 et x_4. Écrivons-la

$$\begin{aligned} \varphi = {} & A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 \\ & + 2B_{12} x_1 x_2 + 2B_{13} x_1 x_3 + 2B_{14} x_1 x_4 \\ & + 2B_{23} x_2 x_3 + 2B_{24} x_2 x_4 + 2B_{34} x_3 x_4. \end{aligned}$$

Nous avons d'abord

$$(a_1) \leqq A_1, \quad (a_2) \leqq A_2, \quad (a_3) \leqq A_3, \quad (a_4) \leqq A_4,$$

la parenthèse (a) désignant la valeur absolue de a; ces inégalités sont évidentes, car on a

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$
$$f = U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2.$$

On a, d'autre part,

$$(a_i a_k - b_{ik}^2) \leqq A_i A_k - B_{ik}^2,$$

i et k ayant deux valeurs différentes et comprises, bien entendu, entre un et quatre : c'est ce que l'on voit encore immédiatement à l'aide des expressions précédentes de φ et f.

Enfin, en faisant dans f et φ une des variables égale à zéro, soit par exemple x_4, nous avons deux formes ternaires; le discriminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix}$$

a une moindre valeur absolue que le discriminant correspondant (nécessairement positif, puisque la forme φ est définie et positive)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & A_2 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & A_3 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant peut, en effet, se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés, tandis que le premier est égal à la somme de deux de ces carrés diminuée de la somme des deux autres.

3. Nous dirons qu'une forme indéfinie f est réduite, si l'on peut trouver des valeurs des indéterminées (M, P, Q, R) telles que pour celles-ci la forme définie correspondante φ soit elle-même réduite.

Nous n'allons considérer ici que les formes indéfinies f, telles que

l'on ne puisse avoir

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

pour les valeurs entières des indéterminées x_1, x_2, x_3 et x_4.

Une forme quaternaire étant donnée, on pourra toujours reconnaître s'il en est ainsi ou non : cette question n'est qu'un cas particulier d'une question beaucoup plus générale, traitée par M. Jordan dans son important Mémoire sur les formes quadratiques (*Journal de l'École Polytechnique*, 1882). Indiquons seulement un exemple pour montrer qu'il y a bien effectivement des formes f, pour lesquelles on ne peut satisfaire à l'égalité précédente : que l'on prenne, en effet,

$$f = a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2),$$

on voit de suite que si le produit ab n'est pas une somme de deux carrés, la forme f ne peut pas représenter zéro.

Ces restrictions faites sur les formes indéfinies f que nous allons considérer, nous avons à indiquer les conditions de réduction à adopter pour la forme définie φ. Théoriquement, les conditions de réduction dues à MM. Korkine et Zolotareff sont très convenables pour notre objet. Je rappelle qu'une forme définie φ est réduite, si on peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\mu_1(x_1 + \varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4)^2\\ &\quad + \mu_2(x_2 + \varepsilon_4 x_3 + \varepsilon_5 x_4)^2 + \mu_3(x_3 + \varepsilon_6 x_4)^2 + \mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

les ε étant compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et les μ satisfaisant aux inégalités

$$\mu_2 \geq \tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \mu_3 \geq \tfrac{1}{2}\mu_2, \quad \mu_4 \geq \tfrac{1}{2}\mu_3;$$

le discriminant D de la forme est d'ailleurs égal à $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

Des inégalités précédentes et de ce que μ_1 coefficient de A_1 de x_1^2 dans φ, est au moins égal à la valeur absolue de a_1 (n° **2**) et par suite à l'unité, on conclut que les quatre quantités μ sont limitées en fonction du discriminant D; il en résulte immédiatement, à l'aide des inégalités mentionnées au n° **2**, que tous les coefficients de la forme réduite in-

définie f sont aussi limités en fonction de D. *Le nombre des réduites arithmétiquement équivalentes à la forme f est donc fini.*

Pour faire pratiquement le calcul, on pourra employer d'autres conditions de réduction, qui seront bien préférables : je veux parler des conditions de réduction données par M. Charve (*Annales de l'École Normale*, 1882), et qui résultent de l'extension aux formes quaternaires de la remarquable méthode employée par M. Selling pour les formes ternaires.

M. Charve introduit dans la forme définie, dont nous désignons pour un instant les variables par x, y, z, t, une cinquième variable u, en remplaçant x, y, z, t respectivement par $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$; on obtient alors une forme que l'on peut écrire

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a(x-y)^2+b(x-z)^2+c(x-t)^2+d(x-u)^2+e(y-z)^2 \\ \quad +f(y-t)^2+g(y-u)^2+h(z-t)^2+k(z-u)^2+l(t-u)^2, \end{cases}$$

et qui devient identique à la forme proposée quand on fait $u=0$.

On montre d'ailleurs que toute substitution effectuée sur x, y, z, t revient à une substitution d'une forme convenable effectuée sur x, y, z, t, u.

Considérons donc la forme (I); les conditions de réduction sont les suivantes :

1° Ou bien tous les coefficients $a, b, \ldots, k, l$ sont positifs;

2° Ou bien a seul est négatif, et il est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g;

3° Ou bien a et h sont seuls négatifs; de plus, a est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g; en même temps h est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l; enfin $a+h$ est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

La réduite ainsi définie est unique, c'est-à-dire que, quand une forme vérifie l'une des conditions de réduction, il n'existe aucune autre forme arithmétiquement équivalente satisfaisant soit à cette condition, soit à l'une des deux autres. On doit d'ailleurs considérer comme identiques les formes qu'on déduit d'une forme donnée par la permutation des variables.

On remarque immédiatement que les coefficients $a, b, \ldots, k, l$ sont

des fonctions linéaires et homogènes des coefficients de la forme primitive.

5. Nous avons ici jusqu'ici considéré la forme définie φ avec les paramètres M, P, Q, R, qui peuvent être réduits à huit, mais ceux-ci sont liés par trois relations. On a

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2(M_3 u_1 + P_3 u_2 + Q_3 u_3 + R_3 u_4)^2 + 2(M_4 u_1 + P_4 u_2 + Q_4 u_3 + R_4 u_4)^2$$

avec les relations

$$M_3^2 + P_3^2 - Q_3^2 - R_3^2 = -1,$$
$$M_4^2 + P_4^2 - Q_4^2 - R_4^2 = -1,$$
$$M_3 M_4 + P_3 P_4 - Q_3 Q_4 - R_3 R_4 = 0.$$

Posons d'abord

$$M_3 + iM_4 = \mu, \quad P_3 + iP_4 = \pi, \quad Q_3 + iQ_4 = \varkappa, \quad R_3 + iR_4 = \rho;$$

et les relations précédentes deviendront

$$\mu^2 + \pi^2 - \varkappa^2 - \rho^2 = 0,$$
$$\mu\mu_0 + \pi\pi_0 - \varkappa\varkappa_0 - \rho\rho_0 = -2,$$

μ_0 désignant la conjuguée de μ et de même pour les autres lettres.

Quant à la forme φ, nous pourrons l'écrire

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\text{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \varkappa u_3 + \rho u_4)$$

ou bien encore

$$2\varphi = (-\mu\mu_0 - \pi\pi_0 + \varkappa\varkappa_0 + \rho\rho_0)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) + 4\,\text{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \varkappa u_3 + \rho u_4).$$

Comme la forme φ n'est considérée que pour en faire la réduction continuelle, nous ne modifierons rien en la divisant par le facteur po-

sitif $\varkappa\varkappa_0$, et nous aurons, en posant

$$a = \frac{\mu}{\varkappa}, \quad b = \frac{\pi}{\varkappa}, \quad c = \frac{\rho}{\varkappa},$$

$$(1 + cc_0 - aa_0 - bb_0)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2)$$
$$+ 4 \text{ norme}(au_1 + bu_2 + u_3 + cu_4).$$

Entre a, b et c existera d'ailleurs la relation

$$a^2 + b^2 = 1 + c^2,$$

et l'on devra avoir

$$aa_0 + bb_0 < 1 + cc_0.$$

On satisfera de la manière la plus générale à la relation a, b et c en posant

$$a = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad b = -\frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad c = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

ξ et η étant deux paramètres arbitraires, et, après multiplication par un facteur positif, il vient, pour la forme définie,

$$\text{(I)} \quad (\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2)$$
$$+ 2 \text{ norme}[(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + u_3(\eta + \xi) + (1 - \xi\eta)u_4].$$

Quant à la condition

$$aa_0 + bb_0 < 1 + cc_0,$$

elle devient

$$(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi) > 0.$$

Nous avons alors maintenant à effectuer la réduction continuelle de la forme (I), *renfermant les paramètres complexes arbitraires* ξ *et* η : l'inégalité ci-dessus nous montre seulement que, dans ces deux paramètres, les coefficients de $\sqrt{-1}$ doivent être du même signe. Nous supposerons ces deux coefficients positifs, car on voit immédiatement que la forme (I) ne change pas quand on remplace respectivement ξ et η par leurs conjugués ξ_0 et η_0. Si donc nous désignons par domaine S

l'ensemble des valeurs de ξ et η ayant pour coefficient de $\sqrt{-1}$ une quantité positive, nous pouvons dire que l'on a à effectuer la réduction continuelle de (I) pour les valeurs de ξ et η appartenant au domaine S.

7. Supposons que la forme indéfinie f, correspondant à φ, soit réduite. La forme φ, que nous prenons d'abord sous sa première expression, sera réduite pour des valeurs convenables de M_3, P_3, Q_3, R_3 et M_4, P_4, Q_4, R_4.

D'après ce que nous avons dit précédemment, les coefficients de x_1^2, x_2^2, x_3^2 et x_4^2, dans φ, sont limités en fonction du déterminant de la forme f. Or soient

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4, \\ u_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4, \\ u_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' x_4, \\ u_4 &= \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + \delta''' x_4; \end{aligned}$$

on voit qu'alors les quatre expressions

$$\begin{gathered} (M_3\alpha + P_3\alpha' + Q_3\alpha'' + R_3\alpha''')^2, \quad (M_3\beta + P_3\beta' + Q_3\beta'' + R_3\beta''')^2, \\ (M_3\gamma + P_3\gamma' + Q_3\gamma'' + R_3\gamma''')^2, \quad (M_3\delta + P_3\delta' + Q_3\delta'' + R_3\delta''')^2 \end{gathered}$$

sont nécessairement finies et, par suite, M_3, P_3, Q_3 et R_3; on arrive nécessairement à la même conclusion pour M_4, P_4, Q_4 et R_4.

Je dis, de plus, que, pour aucun système de valeurs convenables, on n'a

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

C'est ce que montrent les trois relations auxquelles satisfont les paramètres; elles se réduiraient en effet, dans cette hypothèse, à

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1, \quad M_4^2 + P_4^2 - R_4^2 = -1, \quad M_3 M_4 + P_3 P_4 - R_3 R_4 = 0,$$

et l'on en conclurait

$$(P_3 M_4 - M_3 P_4)^2 + M_3^2 + P_3^2 + M_4^2 + P_4^2 + 1 = 0.$$

Les trois quantités représentées par a, b, c (n° 6) sont donc finies. Nous allons voir qu'à ces valeurs de a, b, c correspondent des valeurs finies de ξ et η. Reprenons les valeurs

$$a = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad b = -\frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad c = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

avec la relation

$$a^2 + b^2 = 1 + c^2.$$

A un système de valeurs de a, b, c correspondent toujours des valeurs finies de ξ et η, sauf quand on a

$$b = c.$$

Or cette relation entraînerait $\pi = \rho$ ou $P_3 = R_3$ et $P_4 = R_4$; les relations deviendraient

$$M_3^2 - Q_3^2 = -1, \quad M_4^2 - Q_4^2 = -1, \quad M_3 M_4 - Q_3 Q_4 = 0,$$

ce qui donne immédiatement l'égalité impossible

$$M_3^2 + M_4^2 + 1 = 0.$$

Je dis enfin que, dans ξ et dans η, les coefficients de $\sqrt{-1}$ sont différents de zéro. On a, en effet,

$$aa_0 + bb_0 - 1 - cc_0 = -\frac{2}{\varkappa\varkappa_0},$$

$\varkappa$ étant, on se le rappelle, toujours fini et différent de zéro. En remplaçant a, b, c par leurs valeurs en ξ et η, on a

$$\frac{(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)} = \frac{1}{\varkappa\varkappa_0}.$$

Or $\eta + \xi$ n'est pas nul, puisque a, b et c sont finis, et la proposition énoncée est dès lors évidente.

Les diverses remarques que nous venons de faire nous permettent maintenant d'énoncer la proposition suivante :

L'ensemble des valeurs de ξ et η appartenant au domaine S, pour lesquelles la forme

$$(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi)(u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2) \\ +2\,\text{norme}[(\eta-\xi)u_1-(1+\xi\eta)u_2+(\eta+\xi)u_3+(1-\xi\eta)u_4]$$

est réduite, forme à l'intérieur de S *un domaine* D, *limité et n'ayant aucun point commun avec la limite de* S.

La limite de S est formée par les valeurs de ξ et η, pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul.

8. Arrêtons-nous un instant sur la nature analytique des relations qui définiront ce domaine D, en écrivant φ sous la forme (n° **4**)

$$\varphi=a(x_1-x_2)^2+b(x_1-x_3)^2+c(x_1-x_4)^2+dx_1^2+e(x_2-x_3)^2 \\ +f(x_2-x_4)^2+gx_2^2+h(x_3-x_4)^2+kx_3^2+lx_4^2.$$

Nous devons d'abord chercher les expressions de a, b, c, ... en fonction de ξ et η.

Or remarquons que tous les coefficients de la forme φ sont des fonctions de ξ et η qui ont la forme suivante :

$$\xi\xi_0[A\eta\eta_0+B(\eta+\eta_0)+C]+(\xi+\xi_0)[A'\eta\eta_0+B'(\eta+\eta_0)+C'] \\ +[A''\eta\eta_0+B''(\eta+\eta_0)+C''],$$

où les A, B et C sont essentiellement réels.

Les divers coefficients a, b, c, ... seront donc de cette forme et, par suite, δ désignant toujours une expression de cette forme, le domaine D, correspondant à la réduite f, sera limité par des *surfaces*

$$\delta=0.$$

La nature des *surfaces* limitant le domaine D nous sera utile dans la suite.

9. Effectuons maintenant la réduction continuelle de φ. Nous avons

dit que la forme φ était réduite tant que le point (ξ, η) était à l'intérieur du domaine D. Lorsque le point (ξ, η) sort de ce domaine, il faut, suivant les circonstances de la variation de ce point, employer certaines substitutions pour réduire la forme de nouveau, ce qui donne, en employant la totalité des substitutions propres à réduire de nouveau φ, certaines réduites adjacentes à la réduite F, auxquelles correspondent des domaines D′, D″, ... On continue ainsi à effectuer la réduction continuelle de la forme φ jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles réduites, ce qui arrivera nécessairement, puisque le nombre des réduites est limité; à chacun des domaines D, D′, ... correspondent d'ailleurs toutes les réduites qui se déduisent de l'une d'elles par la permutation des variables. Désignons par δ *le domaine total formé par les domaines* D, D′, D″, ... Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine δ, on retombe sur une réduite déjà obtenue, à laquelle se trouve ainsi correspondre un nouveau domaine D.

Soit encore, pour ne pas multiplier les notations,

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

cette réduite. En faisant passer (ξ, η) du domaine D dans le domaine D_1, on est alors conduit à une substitution S à coefficients entiers, transformant f en elle-même. A une telle substitution correspond manifestement une substitution linéaire faite sur u_1, u_2, u_3 et u_4, soit

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3, u_4, \quad & A u_1 + B u_2 + C u_3 + D u_4, \quad A' u_1 + B' u_2 + C' u_3 + D' u_4, \\ & A'' u_1 + B'' u_2 + C'' u_3 + D'' u_4, \quad A''' u_1 + B''' u_2 + C''' u_3 + D''' u_4),\end{aligned}$$

et cette substitution transforme en elle-même l'expression

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Reprenons maintenant la forme φ, en l'écrivant, comme au n° **6**,

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\text{norme}(\mu u_1 + \pi u_2 + \varkappa u_3 + \rho u_4).$$

Si l'on effectue sur φ la substitution S, cette forme deviendra

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 + 2\,\text{norme}(\mu' u_1 + \pi' u_2 + \varkappa' u_3 + \rho' u_4),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
\mu' &= A\mu + A'\pi + A''\varkappa + A'''\rho,\\
\pi' &= B\mu + B'\pi + B''\varkappa + B'''\rho,\\
\varkappa' &= C\mu + C'\pi + C''\varkappa + C'''\rho,\\
\rho' &= D\mu + D'\pi + D''\varkappa + D'''\rho,
\end{aligned}$$

et cette dernière substitution transformera en elle-même l'expression

$$\mu^2 + \pi^2 - \varkappa^2 - \rho^2,$$

et, puisque l'on a

$$\mu^2 + \pi^2 - \varkappa^2 - \rho^2 = 0,$$

on aura pareillement

$$\mu'^2 + \pi'^2 - \varkappa'^2 - \rho'^2 = 0$$

et aussi

$$\mu'\mu'_0 + \pi'\pi'_0 - \varkappa'\varkappa'_0 - \rho'\rho'_0 = -2.$$

Nous avons précédemment posé (nº 6)

$$\frac{\mu}{\varkappa} = \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi}, \quad \frac{\pi}{\varkappa} = -\frac{1 + \xi\eta}{\eta + \xi}, \quad \frac{\rho}{\varkappa} = \frac{1 - \xi\eta}{\eta + \xi},$$

d'où l'on peut tirer

$$\xi = \frac{\varkappa - \mu}{\rho - \pi}, \quad \eta = \frac{\varkappa + \mu}{\rho - \pi}.$$

Nous poserons pareillement ici

$$\xi' = \frac{\varkappa' - \mu'}{\rho' - \pi'}, \quad \eta' = \frac{\varkappa' + \mu'}{\rho' - \pi'}.$$

ξ' et η' vont être des fonctions de ξ et η, que nous nous proposons maintenant de trouver. Or posons, pour un instant,

$$\varkappa - \mu = \omega_1, \quad \varkappa + \mu = \omega_2, \quad \rho - \pi = \omega_3, \quad \rho + \pi = \omega_4,$$

on aura

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 = 0.$$

Soient de même

$$\varkappa' - \mu' = \omega'_1, \quad \varkappa' + \mu' = \omega'_2, \quad \rho' - \pi' = \omega'_3, \quad \rho' + \pi' = \omega'_4$$

et

$$\omega'_1\omega'_2 + \omega'_3\omega'_4 = 0;$$

les ω' sont des fonctions linéaires et homogènes des ω, et cette substitution, dont les coefficients sont réels, faite sur les ω, transforme en elle-même l'expression $\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4$.

On aura

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \quad \eta = \frac{\omega_2}{\omega_3},$$

$$\xi' = \frac{\omega'_1}{\omega'_3}, \quad \eta' = \frac{\omega'_2}{\omega'_3}.$$

On voit d'abord immédiatement que ξ' et η' sont des fonctions rationnelles de ξ et η de la forme

$$\xi' = \frac{A'\xi\eta + B'\eta + C'\xi + D'}{A\xi\eta + B\eta + C\xi + D}, \quad \eta' = \frac{A''\xi\eta + B''\eta + C''\xi + D''}{A\xi\eta + B\eta + C\xi + D},$$

les divers coefficients étant réels; mais on peut aller plus loin, en employant les considérations dont a fait usage M. Goursat dans sa belle étude sur les équations linéaires du quatrième ordre ayant quatre intégrales liées par une relation quadratique (*Bulletin de la Société mathématique*, 1883). On reconnaît alors que les expressions de ξ' et η' en fonction de ξ et η sont de l'une ou l'autre forme

(I) $$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{l\eta + m}{n\eta + p},$$

(II) $$\xi' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \eta' = \frac{\lambda\xi + \mu}{\nu\xi + \pi},$$

les coefficients de ces différentes substitutions étant réels.

On en conclut le théorème suivant qui est fondamental :

On passera du domaine D *au domaine* D_1 *en effectuant sur* (ξ, η) *une substitution de la forme* (I) *ou de la forme* (II).

En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme φ, on obtiendra un *groupe* G d'une infinité de substitutions, telles que (I) ou (II); ce groupe sera *discontinu*, car à un système de valeurs de (ξ, η) ne correspond qu'une seule réduite arithmétiquement équivalente à la forme définie φ (nous regardons toujours comme identiques,

ainsi qu'il a été dit plus haut, les réduites qui ne diffèrent que par la permutation des variables); le point (ξ, η) ne peut donc appartenir qu'à un seul domaine D.

Le domaine δ est un domaine *fondamental* de ce groupe, c'est-à-dire qu'à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe *un point et un seul* à l'intérieur de δ; c'est ce qui résulte immédiatement de ce que δ est l'ensemble des domaines D correspondant à *toutes* les réduites distinctes arithmétiquement équivalentes à f.

Nous donnerons le nom de *groupe hyperabélien* à tout groupe discontinu de substitutions relatives à deux variables complexes ξ et η, chacune de ces substitutions étant de la forme (I) ou de la forme (II).

Il résulte des considérations qui viennent d'être développées qu'*à chaque forme quadratique quaternaire à coefficients entiers, réductible au type*

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

correspond un groupe hyperabélien.

CHAPITRE II.

1. On vient de voir que les formes quadratiques indéfinies conduisaient à une classe étendue de *groupes hyperabéliens*. On est alors tout naturellement conduit à se demander si l'on peut faire la recherche générale des groupes *hyperabéliens*, absolument comme M. Poincaré a fait l'étude complète des groupes *fuchsiens*. C'est ce que je me propose maintenant d'examiner, en me bornant au cas où toutes les substitutions seraient de la forme $\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right)$.

Dans l'exemple précédent, on a vu que le groupe avait un domaine fondamental limité par des *surfaces* que nous avons appelées δ et dont l'équation était de la forme

$$\begin{aligned}\xi\xi_0 & [A\eta\eta_0 + B(\eta + \eta_0) + C] \\ & + (\xi + \xi_0)[A'\eta\eta_0 + B'(\eta + \eta_0) + C'] + A''\eta\eta_0 + B''(\eta + \eta_0) + C'' = 0,\end{aligned}$$

où les A, B, C sont réels.

Nous allons considérer les groupes ayant un *domaine* fondamental limité par des *surfaces* de cette nature, et, pour avoir des groupes analogues à ceux que nous venons d'étudier, nous supposons que la limite de ce domaine fondamental n'ait aucun point commun avec la limite de S (cette limite est formée, comme on se le rappelle, par les valeurs de ξ et η pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul). Le domaine fondamental est de plus convexe, c'est-à-dire que le domaine tout entier est situé d'un même côté d'une quelconque des faces.

Les faces du domaine δ sont en nombre pair et se correspondent deux à deux par une substitution fondamentale du groupe. Nous avons à distinguer particulièrement les *arêtes,* c'est-à-dire les *continuum* de points, intersections de deux faces, puis les sommets par où passent au moins quatre faces.

Considérons une face F_0 du domaine δ et sur cette face une arête A_0 : soit F'_0 la face conjuguée de F_0 et sur cette face A'_0 l'arête correspondant à A_0. L'arête A'_0 est l'intersection de la face F'_0 et d'une autre face F''_0; opérons sur F''_0 comme nous avons opéré sur F_0, et continuons ainsi. Nous obtiendrons une suite d'arêtes $A_0, A_1, \ldots$, et il est clair que nous finirons par retomber sur l'arête A_0; supposons donc que l'arête A_n coïncide avec l'arête A_0; il importe maintenant de nous arrêter sur la substitution S qui transforme l'arête A_0 en l'arête A_n. Trois cas vont pouvoir se présenter :

1° Tout d'abord, si cette substitution S se réduit à la substitution unité, nous serons ramené évidemment après les n substitutions indiquées au domaine primitif δ, et l'arête considérée appartiendra à n domaines congrus à δ et à n seulement.

2° Supposons maintenant que l'arête A_n coïncide encore avec l'arête A_0, *point par point,* mais cela de la manière la plus générale qu'il soit possible. La substitution S devra être alors de l'une ou l'autre forme

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \eta\right),$$

$$\left(\xi, \eta, \xi, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

et l'arête A_0 aura, par suite, une équation de la forme $\xi = \alpha$ dans le premier cas, et $\eta = \beta$ dans le second cas.

Plaçons-nous dans la première hypothèse pour fixer les idées; α correspondra au point double de la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right).$$

Ceci posé, considérons un point (ξ, η) situé dans le domaine fondamental S, ξ étant voisin de α, et η étant, sauf la condition précédente, arbitraire. Laissant η fixe, faisons décrire à ξ un petit contour autour de α; en décrivant ce contour, on rencontrera successivement différentes régions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ Quand on arrivera à δ_n, l'arête A_n, homologue dans δ_n à l'arête A_0 de δ, coïncidera avec l'arête A_0. Qu'on prenne alors une des faces de S passant par l'arête A_0, soit

$$F_0 = 0,$$

la substitution (S) transforme cette face $F_0^{(n)}$ en

$$F_0^{n} = 0.$$

Pour une valeur fixe, mais arbitraire, donnée à η, les équations précédentes représentent, dans le plan de la variable ξ, deux cercles passant par $\xi = \alpha$; d'après ce qui vient d'être dit, l'angle de ces deux cercles devra être une fraction aliquote de 2π, soit $\frac{2\pi}{p}$, et, en répétant p fois la substitution S, on reviendra au domaine primitif δ. La substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$$

aura pour multiplicateur

$$e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

3° Il peut arriver enfin que l'arête A_n coïncide avec l'arête A_0, mais non point par point. Reprenons la substitution S

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right).$$

Supposons, comme dans le second cas, que l'arête A_0 ait pour équa-

tion $\xi = \alpha$; en répétant un nombre convenable p de fois la substitution S, on devra rentrer dans le second cas, et l'on en conclut, par conséquent, que le multiplicateur de la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$$

est de la forme

$$e^{\frac{2i\pi}{pq}},$$

q étant, comme p, un entier. Quant au multiplicateur de la substitution relative à η,

$$\left(\eta, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

il est évident qu'il sera une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et, en faisant décrire à η un contour infiniment petit autour du point double, pendant que ξ garde la valeur α, on démontre de suite que cette racine est $e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

2. Nous venons de trouver un certain nombre de conditions nécessaires pour que le groupe soit discontinu; ces conditions sont-elles suffisantes? On le démontrera en suivant absolument la même marche que M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens.

Soient A un point quelconque intérieur S, B un point pris arbitrairement dans le domaine S. Joignons A à B par une succession de valeurs de (ξ, η), ne coupant pas la limite du domaine S. Cet *arc* sortira du domaine δ par une face, on construira le domaine limitrophe δ_1, puis on opérera sur δ_1 comme sur δ, et ainsi de suite.

On établit, en raisonnant comme M. Poincaré :

Qu'après un nombre *fini* d'opérations, on arrive à un domaine à l'intérieur duquel se trouve le point B, et que ce domaine est toujours *le même,* quel que soit l'arc qui joigne A à B.

Il n'y a donc aucune difficulté *théorique* à la recherche des groupes hyperabéliens. La recherche effective présentera certainement de grandes complications de calculs, d'autant qu'on n'est plus aidé ici par des constructions géométriques.

3. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le domaine fondamental n'avait aucun point commun avec la limite de S. Bien des cas pourraient se présenter; je me borne à signaler celui qui se rap-

proche le plus des cas qui viennent d'être examinés. Nous n'avons qu'à supposer qu'une des *arêtes*

$$\xi = \alpha$$

est sur la limite de S, c'est-à-dire que α est réel; soit

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \eta\right)$$

la substitution fondamentale conservant cette arête; il est clair que la substitution

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$$

sera parabolique et aura α pour point double.

4. On se rappelle qu'à chaque groupe fuchsien M. Poincaré fait correspondre un nombre p qu'il appelle le *genre* de groupe. Nous allons montrer maintenant qu'à chaque groupe hyperabélien *correspondent trois nombres* p_1, p_2, p_3.

Soit δ un domaine fondamental du groupe; ce domaine à quatre dimensions est limité par certains espaces à trois dimensions, dont les points se correspondent respectivement deux à deux par les substitutions fondamentales du groupe et devront, dans ce qui va suivre, être considérés comme confondus. C'est ainsi que nous dirons qu'un espace à m dimensions ($m < 4$) contenu dans δ est *fermé*, quand les points, où cet espace rencontre la limite de δ, se correspondent deux à deux par une substitution fondamentale du groupe; un espace *fermé* peut nécessairement alors se composer de parties distinctes : nous ne considérons d'ailleurs que des espaces fermés ne se coupant pas eux-mêmes. Un ou plusieurs espaces *fermés* à m dimensions constitueront le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, quand, par ces espaces à m dimensions, on pourra faire passer un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, dont ils limiteront une partie.

([1]) La connexité dans les espaces à m dimensions a déjà été étudiée par divers géomètres; on pourra consulter à ce sujet un savant Mémoire de M. Betti (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IV).

Ceci posé, si l'on peut imaginer dans δ un nombre p_m d'espaces *fermés* à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, mais tel que tout autre espace *fermé* à m dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace *fermé* à $m+1$ dimensions contenu dans δ, *nous dirons que le domaine* δ *a une connexion de* $m^{\text{ième}}$ *espèce d'ordre* (p_m+1).

Nous avons à faire successivement $m = 1, 2, 3$, ce qui nous donne *trois nombres* p_1, p_2, p_3 *correspondant aux diverses connexions du groupe.*

5. Arrêtons-nous sur un cas particulier. Je suppose que le groupe hyperabélien considéré résulte simplement de la superposition de deux groupes fuchsiens relatifs respectivement aux variables u et v. Les substitutions fondamentales sont donc de l'une et l'autre forme

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, v\right),$$

$$\left(u, v, u, \frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right);$$

concevons, dans le plan des u, un polygone fondamental du groupe fuchsien $\left(u, \frac{au+b}{cu+d}\right)$, et faisons de même dans le plan des v pour le groupe $\left(v, \frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right)$.

Nous pouvons appliquer au polygone fondamental d'un groupe fuchsien les considérations que nous avons indiquées au paragraphe précédent; le nombre m est ici unique et égal à l'unité, et la connexion de première espèce n'est évidemment autre chose que $2p+1$, en désignant par p le genre du groupe fuchsien d'après M. Poincaré. Désignons par p et p' les genres respectifs des groupes relatifs à u et à v. On pourra donc tracer sur les polygones représentatifs de ces groupes respectivement $2p$ et $2p'$ courbes *fermées* (au sens indiqué plus haut) qui ne limiteront aucune partie des polygones. Proposons-nous de rechercher la valeur de p_3 relative au domaine fondamental du groupe obtenu en superposant ces deux groupes fuchsiens.

Je dis d'abord que l'on a

$$p_3 = 2p + 2p'.$$

Imaginons, en effet, sur les deux polygones les $2p$ et $2p'$ courbes *fermées*, que nous désignerons par C et C'; une quelconque de ces courbes prise seule constitue relativement aux quatre variables un espace *fermé à trois* dimensions. Nous avons donc là $2p + 2p'$ espaces fermés à trois dimensions; or ces espaces ne constituent pas évidemment le contour d'un espace à quatre dimensions, puisque sur chacun des polygones on peut tracer une ligne allant d'un point à un autre et ne rencontrant pas les courbes fermées qui sont tracées sur lui. Il faut montrer maintenant que tout autre espace fermé à trois dimensions peut constituer, avec les $(2p + 2p')$ espaces dont il vient d'être question, le contour d'un espace fermé à quatre dimensions. Soit donc E un espace fermé à trois dimensions; s'il ne limite pas avec les $(2p + 2p')$ premiers une portion du domaine fondamental, on pourra certainement tracer une courbe fermée L, rencontrant seulement E en un seul point et ne rencontrant aucun des $2p + 2p'$ autres espaces. Or toute courbe fermée, tracée dans l'un et l'autre polygone, et qui ne rencontre aucune des $2p$ et $2p'$ courbes C et C', limite sur chacun des polygones une aire déterminée; la courbe fermée L rencontrera donc certainement au moins une seconde fois l'espace E, ce qui ne devrait pas être. Nous avons donc bien, comme connexion de troisième espèce du domaine fondamental,

$$2p + 2p' + 1.$$

Je ne m'arrêterai pas à chercher la valeur de p_2; qu'il me suffise de dire, en vue d'une remarque ultérieure, que p_2 doit être nécessairement une fonction entière et symétrique de p et p', par conséquent une fonction de pp' et $p + p'$.

6. Quoique le groupe précédent soit bien spécial, il n'en présente pas moins quelque intérêt.

Que l'on conçoive, en effet, un groupe hyperabélien, dans lequel les coefficients des substitutions fondamentales dépendraient d'un ou plusieurs paramètres; lorsque les paramètres varient entre certaines limites, les divers ordres de connexion du groupe ne changeront pas, et si, pour un système de valeurs convenables des paramètres, le groupe hyperabélien coïncide avec un groupe du type examiné dans le paragraphe précédent, l'étude du groupe général se trouvera notablement simplifiée.

Un exemple bien simple nous sera fourni par un groupe qui, quoique ne rentrant pas complètement dans la catégorie des groupes hyperabéliens, n'en diffère pas cependant au point de vue de la Géométrie de situation, dont nous nous occupons en ce moment. Que l'on prenne le groupe des fonctions quadruplement périodiques

$$(G) \qquad \begin{cases} (x, y, x+\alpha_1, y+\beta_1), \\ (x, y, x+\alpha_2, y+\beta_2), \\ (x, y, x+\alpha_3, y+\beta_3), \\ (x, y, x+\alpha_4, y+\beta_4), \end{cases}$$

le domaine fondamental est une sorte de parallélépipède dans un espace à quatre dimensions; on peut, par une déformation continue, transformer ce groupe dans le suivant

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} (x, y, x+\omega, y), \ (x, y, x+\omega', y), \\ (x, y, x, y+\Omega), \ (x, y, x, y+\Omega') \end{cases}$$

qui résulte de la superposition des deux groupes effectués respectivement sur x et y. Les ordres de connexion sont les mêmes pour les groupes G et Γ; on a en particulier $p_3 = 4$.

CHAPITRE III.

1. Après avoir étudié les groupes hyperabéliens, nous avons maintenant à rechercher s'il existe des fonctions des deux variables indépendantes ξ et η, qui se reproduisent quand on effectue sur ces variables les substitutions d'un groupe hyperabélien donné. Nous commençons par remplacer le domaine des deux demi-plans relatifs aux variables ξ et η, par deux cercles C et C′ ayant pour centres respectifs les points $\xi = 0$ et $\eta = 0$ et des rayons égaux à l'unité, et soient, comme précédemment,

$$(I) \qquad \left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

$$(II) \qquad \left(\xi, \eta, \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right)$$

les deux types des substitutions du groupe hyperabélien; de plus, chacun des déterminants $ad - bc$, ... de ces substitutions reste supposé égal à l'unité.

Désignons par $R(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle de ξ et η, qui est finie et déterminée quand ξ ou η sont sur les circonférences C ou C'; elle est, de plus, continue pour des systèmes de valeurs correspondant à des points à l'intérieur de ces cercles. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\frac{1}{\xi + \eta + 3}$$

reste finie et déterminée si ξ et η restent à l'intérieur ou sur la limite de leur domaine respectif.

Ceci posé pour toutes les substitutions du type (I), formons l'expression

$$R\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right)\frac{1}{(c\xi + d)^{2m}(c'\eta + d')^{2m}}$$

et, pour celles du type (II), l'expression analogue

$$R\left(\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right)\frac{1}{(\gamma\eta + \delta)^{2m}(\gamma'\xi + \delta')^{2m}},$$

où m est un entier supérieur à 1.

En faisant la somme de toutes ces expressions, nous obtenons une série qui est absolument convergente pour toute valeur de ξ et de η situés à l'intérieur des cercles C et C'.

Pour le montrer, j'emploierai une méthode semblable à celle dont j'ai fait usage pour prouver la convergence de séries analogues dans la théorie des fonctions hyperfuchsiennes. Soit (ξ, η) un système de valeurs des variables indépendantes; décrivons autour de ce point un petit domaine δ, et envisageons tous les domaines correspondant à δ par toutes les substitutions du groupe : on pourra évidemment, puisque le groupe est discontinu, choisir δ de telle manière que tous ces domaines n'aient aucun point commun.

Posons alors

$$\xi = \xi' + i\xi'', \quad \eta = \eta' + i\eta'',$$

et formons l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int d\xi' \, d\xi'' \, d\eta' \, d\eta''$$

étendue à chacun de ces domaines. La somme de ces intégrales sera finie, car elles sont toutes positives, et leur somme est manifestement moindre que le produit des aires des deux cercles. Or cette somme peut s'écrire

$$\int\int\int\int \left\{ \sum \left[\frac{1}{\text{norme}(c\xi + d)(c'\eta + d')} \right]^2 + \sum \left[\frac{1}{\text{norme}(\gamma\eta + \delta)(\gamma'\xi + \delta')} \right]^2 \right\} d\xi' \, d\xi'' \, d\eta' \, d\eta'',$$

intégrale étendue au petit domaine δ. On en conclut que la série formée précédemment est convergente, puisque la série des modules des termes est convergente; m toutefois doit être égal ou supérieur à deux.

Désignons par $\Theta(\xi, \eta)$ la fonction dont l'existence vient d'être ainsi établie; elle est uniforme et continue pour toute valeur des variables à l'intérieur des cercles C et C'. De plus, la fonction se reproduit à un facteur près, quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe; on voit de suite, en effet, qu'on a

$$\Theta\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right) = (c\xi + d)^{2m}(c'\eta + d')^{2m}\,\Theta(\xi, \eta),$$

et l'identité toute semblable

$$\Theta\left(\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right) = (\gamma\eta + \delta)^{2m}(\gamma'\xi + \delta')^{2m}\,\Theta(\xi, \eta).$$

Une difficulté peut se présenter, si l'on craignait que les fonctions Θ ne fussent identiquement nulles; c'est un point que j'ai examiné en détail dans mon Mémoire sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V). Les considérations dont j'ai fait usage alors s'appliquent sans modification au cas actuel, et l'on arrive toujours à cette conclusion que, si la fonction rationnelle R est arbitraire et que m soit suffisamment grand, la fonction correspondante Θ ne sera certainement pas identiquement nulle.

2. Le quotient de deux fonctions Θ donne évidemment une fonction qui ne change pas, quand on effectue sur (ξ, v) une substitution du groupe : c'est à de telles fonctions que je donne le nom de *fonctions hyperabéliennes*. Nous pouvons d'abord énoncer la proposition fondamentale suivante : *Entre trois fonctions hyperabéliennes existe une relation algébrique*. Si l'on se borne d'abord au cas où le domaine fondamental δ n'a pas de points communs avec la limite de S, la démonstration est immédiate, puisque, pour tout système de valeurs données à deux de ces fonctions, la troisième n'a qu'un nombre limité de valeurs, ou présente seulement une indétermination à la manière des fonctions algébriques.

On établit encore, en raisonnant comme je l'ai fait (*Acta mathematica*, t. V) à propos des fonctions hyperfuchsiennes, que, un groupe hyperabélien étant donné, toutes les fonctions hyperabéliennes correspondantes *sont fonctions rationnelles de trois d'entre elles*, soit x, y et z; et l'on a, entre ces trois fonctions, une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

3. Les fonctions hyperabéliennes peuvent être obtenues par l'inversion de quotients d'intégrales d'équations différentielles partielles convenablement choisies.

Prenons deux fonctions hyperabéliennes $F(u, v)$ et $F_1(u, v)$, soit

$$x = F(u, v), \quad y = F_1(u, v).$$

Formons les quatre expressions suivantes

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \omega_2 = u\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}},$$

$$\omega_3 = v\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \omega_4 = uv\sqrt{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}},$$

entre lesquelles existe manifestement la relation

$$\omega_1\omega_4 = \omega_2\omega_3.$$

Nous pouvons considérer les ω comme fonctions de x et y; ces quatre fonctions satisfont à un système de deux équations aux dérivées

partielles de la forme

$$(I)\qquad \begin{cases} r = as + bp + cq + dz, \\ t = a_1 s + b_1 p + c_1 q + d_1 z, \end{cases}$$

p, q, r, s, t étant, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction z de x et y. On voit bien facilement que les a, b, c, d sont des fonctions algébriques de x et y; de plus, si

$$\lambda = F_2(u, v)$$

est une troisième fonction hyperabélienne, telle que toutes les fonctions relatives au même groupe s'expriment par des fonctions rationnelles de x, y et λ (*voir* le paragraphe précédent), les a, b, c, d seront fonctions rationnelles de x, y et λ, celles-ci étant, d'ailleurs, liées par une relation algébrique

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Nous avons donc un système (I) de deux équations linéaires simultanées aux dérivées partielles ayant quatre solutions communes linéairement indépendantes ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4 liées par la relation quadratique

$$\omega_1 \omega_4 = \omega_2 \omega_3;$$

il est clair que, si l'on pose

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v,$$

ces deux équations donneront pour x et y les deux fonctions hyperabéliennes $F(u, v)$ et $F_1(u, v)$.

4. Reprenons les trois fonctions

$$x = F(u, v), \quad y = F_1(u, v), \quad z = F_2(u, v)$$

liées par la relation algébrique de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

à l'aide desquelles toutes les autres fonctions hyperabéliennes de même groupe s'expriment rationnellement. A un point *quelconque* de la surface précédente correspond un *seul* système de valeurs de u et v, abstraction faite de ceux qui s'en déduisent par des substitutions du groupe.

Nous avons maintenant à envisager ces intégrales doubles considérées par Clebsch et M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VI), intégrales qui sont, dans la théorie des surfaces, les analogues des intégrales de première espèce pour le cas des courbes algébriques. C'est un sujet qui se rattache à la notion du *genre* d'une relation algébrique entre trois variables, notion indiquée par Clebsch et développée dans plusieurs beaux Mémoires de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VI et VIII).

Plaçons-nous d'abord dans un cas très simple. Je suppose que la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

n'ait d'autres singularités que des courbes doubles, et que, en tout point de ces courbes doubles, les deux plans tangents à la surface soient distincts; elle peut avoir aussi des points doubles isolés, le cône des tangentes en chacun de ces points doubles ne se réduisant pas à deux plans.

Soit maintenant $Q(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface d'ordre $(m-4)$ passant par les courbes doubles. Les intégrales doubles, auxquelles je faisais allusion plus haut, sont de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)}.$$

Le nombre des coefficients restant arbitraires dans le polynôme $Q(x, y, z)$ d'ordre $(m-4)$ est ce que Clebsch a appelé le *genre de la surface* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1868).

Considérons, en prenant pour variables u et v l'élément de l'intégrale double qui devient alors

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z(x, y, z)};$$

cette expression est une fonction de u et v. Or j'ai déjà considéré une expression de même nature dans mon travail sur les surfaces dont les coordonnées sont des fonctions abéliennes de deux paramètres (*Math. Annalen*, 1882) [1]; en raisonnant comme je l'ai fait alors, on établit sans peine que cette expression est une fonction continue de u et v dans le domaine fondamental δ et, par suite, dans tout le domaine des cercles C et C′. Nous poserons

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z(x, y, z)} = G(u, v),$$

$G(u, v)$ étant uniforme et continue dans les cercles C et C′. On voit facilement ce que devient la fonction $G(u, v)$ quand on effectue sur les variables une substitution du groupe. Soient une substitution quelconque du groupe

$$(u, v, U, V)$$

et $(au + b)(cv + d)$ le dénominateur commun à U et à V.

On aura

$$G(U, V) = (au + b)^2(cv + d)^2\, G(u, v).$$

Ainsi, à chaque polynôme Q d'ordre $(m - 4)$ donnant une surface passant par la courbe double correspond une fonction $G(u, v)$ uniforme et continue dans les cercles C et C′, et satisfaisant à la relation indiquée.

Réciproquement, à toute fonction $G(u, v)$, qui vérifie les conditions précédentes, correspond un polynôme $Q(x, y, z)$ d'ordre $(m - 4)$, tel que la surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par la courbe double. Pour le démontrer, il suffit de considérer l'expression

$$(\alpha) \qquad \frac{G(u, v)\, f'_z(x, y, z)}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

---

[1] Je n'ai pas supposé dans ce travail que la surface eût des points doubles isolés, mais cette circonstance ne change en rien le mode de raisonnement.

qui est une fonction hyperabélienne de u et v et, par suite, une fonction rationnelle de x, y et z. Or nous allons rapidement montrer que cette fonction rationnelle se réduit à un polynôme d'ordre $(m-4)$.

Considérons l'intégrale double

$$\int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} G(u, v)\,du\,dv,$$

qui reste toujours finie; en désignant par $\varphi(x, y, z)$ l'expression (α), l'intégrale précédente pourra s'écrire

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\varphi(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z(x, y, z)},$$

et l'on montrera facilement que, si φ ne se réduit pas à un polynôme, cette intégrale ne pourra pas rester toujours finie. Désignons ce polynôme par $Q(x, y, z)$. Il résulte d'ailleurs d'une des trois formes que l'on peut donner à $Q(x, y, z)$, grâce aux identités

$$\frac{f'_z(x, y, z)}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{f'_x(x, y, z)}{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}} = \frac{f'_y(x, y, z)}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}},$$

que ce polynôme s'annule pour les points de la courbe double. Il reste à démontrer que $Q(x, y, z)$ est au plus de degré $(m-4)$.

On se rappelle que les fonctions hyperabéliennes considérées x, y, z sont obtenues en faisant le quotient de deux fonctions Θ; désignons-les par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, où x, y, z et t désignent maintenant quatre fonctions Θ; $G(u, v)$ deviendra alors, en désignant par n le degré de Q,

$$\frac{Q(x, y, z, t)\begin{vmatrix} x & y & t \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix}}{t^{n-m+4} f'_z(x, y, z, t)},$$

et sous cette forme on voit immédiatement que $G(u, v)$ serait infinie

pour les valeurs de u et v qui annulent la fonction t, si l'on n'avait pas

$$n \leq m - 4,$$

inégalité que nous voulions précisément établir.

5. On voit, d'après le cas que nous venons de traiter, et nous dirons d'une manière générale, que *le genre relatif à un groupe hyperabélien donné* (¹) *est égal au nombre des fonctions* $G(u, v)$ *linéairement indépendantes.*

Ces fonctions $G(u, v)$ sont uniformes et continues dans le domaine des cercles C et C', et, en désignant par

$$(u, v, U, V)$$

une substitution quelconque du groupe, $(cu + d)(\gamma v + \delta)$ étant le dénominateur commun à U et à V,

$$G(U, V) = (cu + d)^2(\gamma v + \delta)^2 G(u, v).$$

6. Arrêtons-nous un moment sur le groupe hyperabélien bien simple, qui résulte de la superposition de deux groupes fuchsiens relatifs séparément aux variables u et v. Les substitutions fondamentales du groupe sont donc de l'un et l'autre type

$$\left(u, v, \frac{au + b}{cu + d}, v\right),$$
$$\left(u, v, u, \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}\right).$$

Aux substitutions $\left(u, \frac{au + b}{cu + d}\right)$ correspond, dans le plan de la variable u, un groupe fuchsien Γ, et pareillement les substitutions $\left(v, \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}\right)$ déterminent un second groupe fuchsien Γ' dans le plan de la variable v.

(¹) On ne doit pas oublier que le domaine fondamental des groupes considérés n'a aucun point commun avec les cercles C et C'.

Il est facile de former, dans ce cas, les fonctions désignées par $G(u, v)$ dans les paragraphes précédents. Soit $\Theta(u)$ une fonction uniforme et continue de u dans le cercle C, et telle que, pour toute substitution du groupe fuchsien Γ, on ait

$$(1)\qquad \Theta\left(\frac{au+b}{cu+d}\right) = (cu+d)^2\,\Theta(u);$$

soit de même $H(v)$ une fonction uniforme et continue de v dans le cercle C', et telle que, pour toute substitution du groupe Γ', on ait

$$(2)\qquad H\left(\frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}\right) = (\gamma v+\delta)^2\,H(v);$$

le produit $\Theta(u)H(v)$ est évidemment une fonction $G(u, v)$.

Or désignons par p le genre du groupe Γ et p' le genre du groupe Γ'. Le nombre des fonctions entières linéairement indépendantes $\Theta(u)$ satisfaisant aux relations (1) est égal à p, celui des fonctions $H(u)$ est égal à p'; nous obtenons donc ainsi pp' fonctions $G(u, v)$ linéairement indépendantes. Réciproquement, toute fonction $G(u, v)$ relative au groupe hyperabélien considéré sera une combinaison linéaire de ces pp' fonctions particulières: c'est un point dont la démonstration est immédiate.

Ainsi donc le genre de toute surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions fuchsiennes de u et des fonctions fuchsiennes de v, et cela de telle manière qu'à un point *quelconque* de la surface ne correspond qu'un seul système de valeurs de u et v, est égal au produit pp' des genres des deux groupes fuchsiens.

Considérons maintenant un de ces groupes dont il a été question (Chap. II, § 6) et qui renferment un ou plusieurs paramètres arbitraires. Le genre des surfaces correspondantes sera constant, et, en désignant, comme ci-dessus, par p et p' les genres des groupes fuchsiens dans lesquels se décompose le groupe pour des valeurs convenables des paramètres, on aura pour expressions du genre des surfaces le produit pp'. Or, d'après ce que nous avons vu (n° 5), pp' est une fonction de p_2 et p_3; par suite, pour les groupes précédents, *le genre des surfaces correspondantes est une fonction de p_2 et p_3*.

Ce résultat, si particulier, me paraît cependant intéressant, car la

question se pose maintenant de savoir si ce résultat subsiste pour tous les groupes hyperabéliens; on rattacherait ainsi, pour une classe étendue de surfaces, la notion de *genre* à une question de Géométrie de situation. J'espère pouvoir revenir un jour sur ce difficile problème, que je me borne maintenant à poser.

7. Revenons, pour terminer, sur les intégrales doubles considérées au n° **4**

$$\text{(I)} \qquad \iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)}.$$

Les diverses déterminations de cette intégrale, quand on va d'un point analytique, je veux dire d'un système donné (x_0, y_0, z_0) de valeurs de x, y et z, à un autre système de valeurs (x_1, y_1, z_1), ont un sens bien net quand on se reporte aux variables u et v.

Soit (u_0, v_0) un système de valeurs de u, v correspondant à x_0, y_0, z_0, et de même (u_1, v_1) correspondant à (x_1, y_1, z_1); désignons, de plus, par (U_1, V_1) les transformées de (u_1, v_1) par une substitution quelconque du groupe; l'intégrale double

$$\int_{u_0}^{U_1}\int_{v_0}^{V_1} G(u, v)\, du\, dv,$$

dont le sens est parfaitement déterminé [puisque $G(u, v)$ est uniforme et continu], représente les diverses déterminations de l'intégrale (I), quand x, y, z va de (x_0, y_0, z_0) à (x_1, y_1, z_1); cette intégrale reste finie pour tout système de valeurs de (x, y, z). Dans le cas où (x_1, y_1, z_1) coïncide avec (x_0, y_0, z_0), on a à considérer les intégrales

$$\int_{u_0}^{U_0}\int_{v_0}^{V_0} G(u, v)\, du\, dv.$$

Ces intégrales sont, en quelque sorte, les analogues des périodes des intégrales simples; mais, tandis que, pour ces dernières, les périodes sont des constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du point de départ, il arrivera ici qu'elles dépendront des valeurs initiales x_0 et y_0.

CHAPITRE IV.

1. Je me propose d'indiquer, dans ce Chapitre, un exemple particulier de fonctions hyperabéliennes, qui a son origine dans la théorie même des fonctions abéliennes.

Considérons une courbe du second genre, et désignons, suivant l'usage, par

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{matrix}$$

le tableau des périodes des intégrales normales. Supposons qu'on ait, entre ces quantités, la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

D étant un entier réel et positif.

On satisfera à la relation précédente, en posant

$$H = \sqrt{D}\frac{x-y}{x+y}, \quad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x+y}, \quad G' = \frac{2\sqrt{D}\,xy}{x+y},$$

où nous prenons positivement le radical.

Nous avons ainsi une classe de fonctions abéliennes (correspondant à $p = 2$), qui ne dépendent que de deux arbitraires x et y. Cherchons d'abord quelles valeurs on pourra donner à x et y; si l'on pose

$$H = h_0 + ih, \quad G = g_0 + ig, \quad G' = g'_0 + ig',$$

il est bien connu qu'on doit avoir

$$g > 0, \quad g' > 0 \quad \text{et} \quad h^2 - gg' < 0.$$

Or, en écrivant

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'',$$

on trouve immédiatement

$$h = \frac{2\sqrt{D}(y'x'' - x'y'')}{\text{norme}(x+y)},$$

$$g = \frac{2\sqrt{D}(x''+y'')}{\text{norme}(x+y)},$$

$$g' = \frac{2\sqrt{D}[y''(x'^2+x''^2) + x''(y'^2+y''^2)]}{\text{norme}(x+y)},$$

et l'on a, par suite,

$$h^2 - gg' = \frac{-x''y''}{(x'+y')^2+(x''+y'')^2};$$

x'' et y'' doivent donc être de même signe, puisque $h^2 - gg'$ est négatif. La considération de g et g', qui sont positifs, permet de conclure qu'on doit avoir

$$x'' > 0, \quad y'' > 0.$$

Ainsi les coefficients de i dans x et y sont positifs.

Ceci posé, on sait que, dans les fonctions abéliennes, les transformations du premier ordre effectuées sur les périodes conduisent à un groupe important de substitutions relatives à G, H, G'; ces substitutions ont le type suivant :

$$G_1 = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

$$H_1 = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

$$G'_1 = \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

où l'on a posé d'une manière générale

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les a, b, c, d sont des entiers vérifiant les six relations

$$(1)\quad \begin{cases} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0. \end{cases}$$

Ce groupe de transformations a fait l'objet des recherches de M. Hermite [*Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, 1855)].

Dans ce groupe, je ne considère ici que le sous-groupe, qui laisse inaltérée l'expression $H^2 - GG'$; il est facile d'obtenir les nouvelles relations entre les (a, b, c, d) qui sont à ajouter aux précédentes. On a, en effet,

$$(\alpha)\quad H_1^2 - G_1 G_1' = \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31} G + 2(cd)_{03} H + (cd)_{02} G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')};$$

or on veut avoir

$$H^2 - GG' = H_1^2 - G_1 G_1' = D,$$

et il ne doit y avoir entre G, H et G′ d'autre relation que $H^2 - GG' = D$, puisqu'il doit rester deux paramètres arbitraires. L'égalité (α) sera donc une relation identique entre G, H et G′, quand on y aura remplacé $H^2 - GG'$ et $H_1^2 - GG_1'$ par D. On trouve ainsi les nouvelles relations

$$(2)\quad \begin{cases} c_3 d_1 - c_1 d_3 = D(a_3 b_1 - a_1 b_3), \\ c_0 d_3 - c_3 d_0 = D(a_0 b_3 - a_3 b_0), \\ c_0 d_2 - c_2 d_0 = D(a_0 b_2 - a_2 b_0), \\ D^2(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \quad + D(a_0 b_1 - a_1 b_0 + c_3 d_2 - c_2 d_3) + c_1 d_0 - c_0 d_1 = 0. \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) déterminent le groupe Γ des substitutions que

nous allons avoir maintenant à considérer. Nous avons posé

$$H = \sqrt{D}\frac{x-y}{x+y}, \quad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x+y}, \quad G' = \frac{2\sqrt{D}xy}{x+y}.$$

En effectuant sur H, G, G' une substitution du groupe Γ, on a les nouvelles valeurs H_1, G_1, G'_1 et, comme on a encore

$$H_1^2 - G_1 G'_1 = D,$$

on peut poser

$$H_1 = \sqrt{D}\frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1}, \quad G_1 = -\frac{2\sqrt{D}}{x_1 + y_1}, \quad G'_1 = \frac{2\sqrt{D}x_1 y_1}{x_1 + y_1};$$

x_1 et y_1 vont être des fonctions de x et y, et, par suite, au groupe Γ correspond un groupe de substitutions relatives aux deux variables indépendantes x et y; c'est la nature de ces substitutions que nous nous proposons de rechercher.

2. Au lieu de partir de deux intégrales normales, supposons qu'on ait considéré deux intégrales abéliennes quelconques dont les périodes normales soient

$$\omega_0, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3,$$
$$\omega'_0, \ \omega'_1, \ \omega'_2, \ \omega'_3$$

avec la relation fondamentale

$$\omega_0\omega'_3 - \omega_3\omega'_0 + \omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1 = 0.$$

Posons d'une manière générale

$$\alpha_{ik} = \omega_i\omega'_k - \omega_k\omega'_i,$$

on aura ainsi six quantités α, et l'on a d'abord entre elles les relations

$$\alpha_{03} + \alpha_{12} = 0,$$
$$\alpha_{10}\alpha_{23} - \alpha_{30}\alpha_{21} = \alpha_{13}\alpha_{20},$$

la première étant la relation fondamentale, et la seconde étant identi-

quement vérifiée. En passant aux intégrales normales, on trouve, pour valeurs de G, H et G',

$$G = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{01}}, \quad H = -\frac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}, \quad G' = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}$$

et, par suite,

$$H^2 - GG' = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{01}}.$$

Nous avons donc, à cause de $H^2 - GG' = D$, la nouvelle relation

$$\alpha_{23} = D\alpha_{01},$$

et, par suite, l'identité entre les α devient la relation

$$\alpha_{03}^2 - D\alpha_{01}^2 = \alpha_{31}\alpha_{02},$$

où ne figurent que les quatre expressions α_{01}, α_{02}, α_{03} et α_{13}.

Effectuons maintenant sur les ω et les ω' la substitution linéaire

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \quad a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + \ldots,$$
$$b_0\omega_0 + \ldots, \quad c_0\omega_0 + \ldots, \quad d_0\omega_0 + \ldots,$$

où les (a, b, c, d) sont des entiers vérifiant les équations (1) du paragraphe précédent, de telle sorte que la relation fondamentale entre les ω et les ω' subsiste après la substitution. Si nous voulons, de plus, que la relation

$$\alpha_{23} = D\alpha_{01}$$

subsiste aussi après la substitution, on retrouve, cela était évident *a priori*, les équations (2) du même paragraphe.

Désignons par des α' ce que deviennent les six quantités α après la transformation; les α' seront évidemment des fonctions linéaires et homogènes des α. Comme on a encore

$$\alpha'_{03} + \alpha'_{12} = 0, \quad \alpha'_{23} = D\alpha'_{01},$$

il s'ensuit que les quatre expressions α'_{01}, α'_{02}, α'_{03} et α'_{13} seront des

fonctions linéaires et à coefficients entiers de α_{01}, α_{02}, α_{03} et α_{13}, et la relation

$$\alpha'^2_{03} - D\alpha'^2_{01} = \alpha'_{31}\alpha'_{02},$$

conséquence des deux précédentes, subsiste nécessairement.

5. Ces remarques faites, nous pouvons chercher les expressions de x_1, y_1 en fonction de x et y.

Des expressions de H, G, G′ en fonction de x et y (n° **1**) on tire

$$x = -\frac{H+\sqrt{D}}{G}, \quad y = \frac{H-\sqrt{D}}{G}$$

et, par suite,

$$x = \frac{\alpha_{03}-\sqrt{D}\alpha_{01}}{\alpha_{31}}, \quad y = \frac{-\alpha_{03}-\sqrt{D}\alpha_{01}}{\alpha_{31}}.$$

On aura de même

$$x_1 = \frac{\alpha'_{03}-\sqrt{D}\alpha'_{01}}{\alpha'_{31}}, \quad y_1 = \frac{-\alpha'_{03}-\sqrt{D}\alpha'_{01}}{\alpha'_{31}}.$$

Si nous posons

$$\alpha_{03}-\sqrt{D}\alpha_{01} = \omega_1, \quad -\alpha_{03}-\sqrt{D}\alpha_{01} = \omega_2, \quad \alpha_{31} = \omega_3, \quad \alpha_{20} = \omega_4,$$

on aura

$$\omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4;$$

à la substitution effectuée sur les α correspond une substitution effectuée sur les ω, et les coefficients de cette substitution sont toujours réels, mais ne sont plus des entiers, et l'on a entre les ω' la relation

$$\omega'_1\omega'_2 = \omega'_3\omega'_4;$$

nous avons donc

$$x = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \quad y = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

et

$$x_1 = \frac{\omega'_1}{\omega'_3}, \quad y_1 = \frac{\omega'_2}{\omega'_3}:$$

ce sont les circonstances dans lesquelles nous nous sommes trouvé précédemment (Chap. I[er], n° 9), et nous aurons, par conséquent, soit

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y_1 = \frac{ly+m}{ny+p},$$

soit

$$x_1 = \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \quad y_1 = \frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\pi}.$$

Le groupe relatif aux deux variables (x, y) *est un groupe hyperabélien;* il est, en effet, d'après son origine même, évidemment *discontinu*. C'est le groupe que nous nous proposions de trouver.

4. Cherchons maintenant dans quels cas les intégrales normales u et v, de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G', \end{matrix}$$

où H, G, G′ satisfont à la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

conduisent à des cas de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Si l'on peut déterminer A et B de telle manière que l'intégrale

$$Au + Bv$$

n'ait que deux périodes, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} mA + nB + p(AG + BH) + q(AH + BG') &= 0, \\ m'A + n'B + p'(AG + BH) + q'(AH + BG') &= 0, \end{aligned}$$

les (m, n, p, q) étant des entiers, tels qu'on n'ait pas $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$, et, par suite, en éliminant A et B,

$$\begin{aligned} mn' - m'n + G(pn' - p'n) + (qn' - q'n + mp' - m'p)H \\ + (mq' - m'q)G' + (qp' - pq')(H^2 - GG') = 0. \end{aligned}$$

Or nous supposons H, G et G′ *uniquement* assujettis à la relation

$$H^2 - GG' = D,$$

c'est-à-dire que nous considérons les quantités x et y des numéros précédents comme arbitraires. On devra donc avoir, dans ces conditions,

$$pn' - p'n = 0,$$
$$qn' - q'n + mp' - m'p = 0,$$
$$mq' - m'q = 0,$$
$$mn' - m'n + (qp' - pq')D = 0.$$

Je dis qu'il résulte de là que D *doit être un carré parfait;* on le voit tout de suite en partant de l'identité

$$(nm' - mn')(pq' - p'q) - (qm' - q'm)(pn' - p'n)$$
$$= (nq' - n'q)(pm' - p'm)$$

qui, en tenant compte des quatre équations précédentes, devient

$$(pq' - p'q)^2 D = (pm' - p'm)^2.$$

Or on ne peut avoir $pq' - p'q = pm' - p'm = 0$, car ces deux équations, jointes aux quatre précédentes, montreraient que m, n, p, q sont proportionnels à m', n', p', q'. On voit donc que l'entier D sera nécessairement, si l'on est dans un cas de réduction, un carré parfait.

Relativement au groupe hyperabélien que nous venons de définir, il y a une différence essentielle entre le cas où D est un carré parfait et celui où il ne l'est pas. Dans le premier, les coefficients des substitutions relatives à x et à y sont rationnels; les groupes

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right) \quad \text{et} \quad \left(y, \frac{ly+m}{ny+p}\right)$$

sont séparément discontinus, et les fonctions relatives à ces groupes se ramènent aux fonctions elliptiques modulaires.

Dans le second cas, les coefficients des substitutions sont irration-

nelles (à cause du radical $\sqrt{D}$); les groupes précédents pris séparément sont continus, et c'est seulement en effectuant leurs substitutions simultanément sur x et y qu'on obtient un groupe discontinu relatif à ces deux variables.

Je me borne à ces remarques sur le groupe qui vient d'être défini; l'étude des modules et des fonctions Θ à indice zéro, quand on remplace G, H et G' par leur valeur en x et y, ne serait pas sans intérêt, mais elle se rattache plus particulièrement à la théorie des fonctions abéliennes; ce sera l'objet d'un travail spécial.

Sur une application des équations de Lagrange;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Les problèmes de Dynamique qu'on peut résoudre complètement, et pour lesquels l'emploi des équations de Lagrange offre un réel avantage, ne sont pas si nombreux qu'il n'y ait quelque intérêt à en signaler un, même des plus simples. Il s'agit de trouver le mouvement d'un point M, assujetti à rester sur un cône donné et sollicité par deux forces dirigées, l'une vers le sommet O du cône, l'autre suivant la perpendiculaire MN abaissée du point M sur une droite OZ issue du point O; les deux forces sont inversement proportionnelles, la première au cube de MO, la seconde au cube de MN.

Je suppose la masse du mobile égale à l'unité, je fais $OM = r$, $MN = p$, et je représente les deux forces par $\frac{A}{r^3}$ et $\frac{B}{p^3}$: on voit qu'il existe une fonction des forces, $V = \frac{A}{2r^2} + \frac{B}{2p^2}$.

La position du point M sur le cône peut être définie par sa distance r au sommet, et par un paramètre λ qui caractérise la génératrice OM; à des variations infiniment petites, dr et $d\lambda$, des coordonnées r et λ correspond pour le point M un déplacement dont l'expression est de la forme

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 Q\, d\lambda^2},$$

Q étant une fonction de λ qui dépend de la nature du cône : la force vive du mobile sera donc, avec les notations de Lagrange,

$$2T = r'^2 + r^2 Q \lambda'^2.$$

La perpendiculaire p est de la forme $\frac{r}{\sqrt{P}}$, P étant une nouvelle fonction de λ; et la fonction des forces devient

$$V = \frac{A + BP}{2r^2}.$$

Celle des équations de Lagrange qui contient les dérivées relatives à r est donc

$$(1) \qquad \frac{dr'}{dt} - Qr\lambda'^2 + \frac{A + BP}{r^3} = 0.$$

Au lieu de la seconde équation, j'écris l'intégrale des forces vives, qui est une conséquence de cette équation et de la précédente,

$$(2) \qquad r'^2 + r^2 Q \lambda'^2 - \frac{A + BP}{r^2} - h = 0.$$

Si je désigne par ρ, α, β, P_0 les valeurs initiales de r, r', $r\lambda'\sqrt{Q}$, P, j'aurai pour la valeur de h

$$(3) \qquad h = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{A + BP_0}{\rho^2}.$$

Additionnons membre à membre les équations (1) et (2), après avoir multiplié par r tous les termes de la première; il se fait de grandes réductions et il reste

$$r\frac{dr'}{dt} + r'^2 - h = 0.$$

On peut intégrer deux fois de suite, et, en supposant $t = 0$ à l'époque initiale, on a, sous forme finie, l'une des intégrales du problème

$$(4) \qquad r^2 = \rho^2 + 2\rho\alpha t + ht^2.$$

Ensuite je tire de cette équation

$$t = \frac{-\rho\alpha \pm \sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}}{h}, \quad dt = \frac{\pm r\,dr}{\sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}},$$

je remplace dans l'équation (2) r' et λ' par $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, puis dt par la valeur ci-dessus, et j'obtiens entre r et λ une équation dans laquelle les variables se séparent, et qui peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{dr}{r\sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}} = \frac{\pm d\lambda\sqrt{Q}}{\sqrt{A + BP - \rho^2(\alpha^2 - h)}}.$$

C'est la seconde intégrale du problème, et il est évident qu'on ne peut effectuer la quadrature du second membre sans particulariser les fonctions P et Q.

L'équation (5) peut être considérée comme l'équation de la trajectoire sur le cône; le premier membre est essentiellement réel, puisqu'il est égal à $\frac{dt}{r^2}$; le second membre doit aussi être réel, et cette condition montrera entre quelles limites peut varier λ. Au point dont les coordonnées sont r et λ, la trajectoire fait avec la génératrice du cône l'angle i défini par l'équation

$$(6) \qquad \tang^2 i = \frac{r^2 Q\, d\lambda^2}{dr^2} = \frac{A + BP - \rho^2(\alpha^2 - h)}{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}.$$

L'équation (4), qui donne la valeur explicite de r^2 en fonction du temps, présente cette circonstance remarquable qu'elle ne dépend pas de la nature du cône; sa discussion, si élémentaire qu'il n'y a pas lieu de la développer ici, apprend comment varie la distance du mobile au point O, et si cette distance peut s'annuler; dans ce cas, le mobile se précipitera au sommet du cône avec une vitesse infinie, rencontrant sous un angle généralement fini les génératrices qui y concourent; il sera soumis à une force infinie, et l'on ne peut dire ce qu'il deviendra ultérieurement sans faire des hypothèses nécessairement arbitraires. L'équation (4) montre que, quand le phénomène se produit, c'est au

bout d'un temps fini, après lequel l'équation elle-même cesse d'être applicable, puisque, en général, elle donnerait pour r des valeurs imaginaires; il y a dans les formules une discontinuité sur laquelle il serait peu utile d'insister.

Je signalerai deux cas particuliers où les résultats se simplifient : 1° quand $h = \alpha^2$, l'équation (4) donne pour r la valeur très simple $\rho + \alpha t$; il faut remarquer que, si cette formule donne pour r des valeurs négatives, elles ne sont acceptables qu'en vertu d'une hypothèse convenable sur ce qui se passe quand le mobile se précipite au sommet du cône; l'équation (5) se simplifie, sans qu'on puisse encore effectuer l'intégration.

Le second cas remarquable est celui où h et α sont nuls; r reste constant et la trajectoire est une courbe sphérique qui dépend de la nature du cône : la loi du mouvement sera fournie par l'équation (2), qui donne ici

$$dt = \pm \frac{d\lambda}{\rho^2}\sqrt{\frac{Q}{A + BP}}.$$

La pression du mobile sur le cône n'est pas donnée par les équations de Lagrange : le moyen le plus simple de la calculer est de se servir de trois axes rectangulaires dont l'un coïncide avec OZ, et dont l'origine soit en O. Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation du cône, N la pression qu'il supporte; on peut écrire les trois équations

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{Ax}{r^4} - \dfrac{Bx}{p^4} - \dfrac{N\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \ldots}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si l'on différentie deux fois par rapport à t l'équation du cône, à laquelle satisfont les coordonnées du mobile, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + x'^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \ldots + 2x'y'\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Remplaçant $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ par leurs valeurs (7), et tenant compte

de ce que $F(x, y, z)$ est homogène, on trouve

$$N\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=\frac{Bz}{p^4}\frac{\partial F}{\partial z}+x'^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\ldots+2x'y'\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};$$

on n'aura qu'à calculer x, y, z et leurs dérivées premières en fonction de r, λ, r', λ', c'est-à-dire, en définitive, en fonction de r et de λ, pour avoir la valeur explicite de N.

Appliquons nos calculs au cas où le cône, rapporté aux axes que je viens d'indiquer, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Le paramètre λ qui caractérise une génératrice sera celui qui entre dans l'équation du cône homofocal au cône donné et passant par la génératrice considérée, soit

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda+c^2}=0.$$

Je suppose $a^2>b^2$; on sait que λ doit être compris entre ces deux quantités pour que les cônes considérés se coupent. Leurs équations, jointes à la relation $x^2+y^2+z^2=r^2$, nous donnent

$$x^2=\frac{a^2r^2(a^2-\lambda)}{(a^2-b^2)(a^2+c^2)},\quad y^2=\frac{b^2r^2(\lambda-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2+c^2)},\quad z^2=\frac{c^2r^2(c^2+\lambda)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)};$$

on calculera T et p et l'on en déduira les fonctions P et Q. Nous n'avons rien de particulier à dire sur l'équation qui lie r et t; quant à l'équation (5) de la trajectoire, elle devient, en remplaçant A par sa valeur tirée de la relation (3),

$$\frac{2\,dr}{r\sqrt{hr^2+\rho^2(\alpha^2-h)}}$$
$$=\frac{\pm\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(\lambda-b^2)(\lambda+c^2)}\sqrt{\beta^2\rho^2+\dfrac{Bc^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)(\lambda-\lambda_0)}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-c^2\lambda)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-c^2\lambda_0)}}}.$$

Il n'y a lieu à discuter que le signe de la quantité sous le dernier radical; cette quantité, positive pour $\lambda = a^2$, peut être positive ou négative pour $\lambda = b^2$; dans le second cas, elle s'annule pour une certaine valeur de λ, et la trajectoire serpente entre deux génératrices répondant à cette valeur et situées du même côté du plan des xz; dans le cas contraire, λ varie alternativement de a^2 à b^2, et la trajectoire fait le tour du cône. On verra que, si elle s'étend indéfiniment, elle admet une asymptote rectiligne. Mais je me hâte de terminer en donnant la valeur de N déduite de la formule générale

$$N = \frac{a^2 b^2 c^2}{\lambda^2 r^4} \left| \frac{B(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)(\lambda^2 + 2c^2\lambda - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)}{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - c^2\lambda)^2} - A + \rho^2(\alpha^2 - h) \right|.$$

Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels;

PAR M. E. LAGUERRE.

I.

1. Je considère une série z, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad Wz' = 2Vz + U,$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers, et je me propose d'étudier son développement en fractions continues.

La série z peut, d'ailleurs, être divergente pour toute valeur de x; rien n'empêche de la réduire en fractions continues; il sera seulement nécessaire de déterminer pour quelles valeurs de x les réduites forment une suite convergente et quelle est la fonction dont elles donnent la valeur.

Dans tout ce qui suit, étant donné un polynôme ou une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, j'appellerai degré du polynôme ou de la série le degré de son premier terme, et je représenterai simplement par la notation $\left(\frac{1}{x^n}\right)$, en faisant abstraction de ses coefficients, une série commençant par un terme du degré $-n$.

2. Cela posé, on sait que, f_n désignant un polynôme entier de degré n, on peut toujours disposer des $(n+1)$ coefficients qu'il renferme, de telle sorte que, φ_n désignant la partie entière de zf_n, le développement de l'expression $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ commence par un terme du degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; une telle fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ se nomme une réduite de z. Pour certaines valeurs du nombre entier n, il peut même arriver que l'approximation soit plus grande et que le premier terme du développement de $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ soit d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; dans ce cas, il y a surapproximation.

En général, on aura donc, d'après la définition des réduites,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right),$$

où ρ désigne un nombre entier positif ou zéro; de là

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)$$

et, en portant ces valeurs de z et z' dans la relation (1),

$$U + 2V\frac{\varphi_n}{f_n} - W\frac{\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n}{f_n^2} + 2V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) - W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right) = 0$$

ou encore

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = f_n^2\left[V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) + W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)\right].$$

Soit μ le degré de la série $V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$; il est clair que le premier membre de cette égalité est un polynôme entier; il en est de même du second, qui est du degré $(\mu - \rho)$; on pourra donc poser, en désignant par A_n une constante dont la valeur dépendra du nombre entier n et par Θ_n un polynôme entier du degré $\mu - \rho$,

$$(2) \qquad Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = A_n\Theta_n.$$

Θ_n est un polynôme entier du degré $\mu - \rho$, il est, par conséquent, d'un degré égal ou inférieur à μ. En général, il est du degré μ, et son degré ne s'abaisse que quand, pour certaines valeurs du nombre n, il y a surapproximation. Le maximum d'approximation aura lieu pour $\rho = \mu$, auquel cas Θ est une constante; une approximation plus grande ne peut avoir lieu : autrement, Θ étant nul, on voit que z serait égal à la fonction rationnelle $\frac{\varphi_n}{f_n}$, cas que j'écarte expressément.

3. Réciproquement, si l'on peut déterminer deux polynômes entiers φ_n et f_n, tels que le premier membre de l'égalité (2) se réduise à un polynôme du degré μ ou d'un degré inférieur, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

Ayant posé, en effet,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + u,$$

d'où

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + u',$$

l'identité (2) devient

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = U + 2Vz - Wz' - 2Vu - Wu'$$

ou encore, par suite de l'équation (1),

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = -2Vu - Wu'.$$

Le premier membre de cette égalité est au plus du degré de

$$\frac{1}{x^{2n+1}}\left(V + \frac{W}{x}\right),$$

et le second, du degré de

$$u\left(V + \frac{W}{x}\right);$$

d'où il résulte que u est au plus de degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$, et, par suite, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

5. Toute la question se réduit ainsi à la solution par des polynômes entiers de l'équation (2), le polynôme Θ_n étant d'un degré au plus égal à μ; et, tout d'abord, j'en déduirai que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre.

A cet effet, je forme l'équation

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-2\int \frac{V}{W} dx}(\varphi_n - z f_n).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y_1' y_2 - y_2' y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} \frac{U f_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de l'identité (2),

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} \frac{\Lambda_n \Theta_n}{W};$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{2V}{W};$$

et de là résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$(3) \qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta_n'] y' + K_n y = 0.$$

Cette équation doit, d'ailleurs, être satisfaite quand on y fait $y = f_n$; K_n est donc un polynôme entier dont le degré est indépendant du nombre n.

4. Supposons maintenant que, K_n et Θ_n désignant des polynômes entiers dont le dernier soit d'un degré égal ou inférieur à μ, un polynôme entier f_n satisfasse à l'équation (3), je dis que l'on peut déterminer le polynôme U qui figure dans l'équation différentielle (1), de telle sorte que la série z qui satisfait à cette équation ait une réduite dont le dénominateur soit f_n.

Soient, en effet, α, β, γ, ... les diverses racines de l'équation $f_n(x)=0$; décomposons en éléments simples la fraction $\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2}$, et posons

$$\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2}=\frac{G_n}{W}+\sum\frac{p_\alpha}{(x-\alpha)^2}+\sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha}.$$

Pour avoir les coefficients p_α et q_α, il faut diviser

$$A_n[\Theta_n(\alpha)+\Theta'_n(\alpha)h]$$

par

$$f'_n(\alpha)\{W(\alpha)f'_n(\alpha)+[W(\alpha)f''_n(\alpha)+W'(\alpha)f'_n(\alpha)]h\};$$

or, $f_n(x)$ satisfaisant à l'équation (3), on a évidemment

$$\Theta_n(\alpha)[W(\alpha)f''_n(\alpha)+W'(\alpha)f'_n(\alpha)]=f'_n(\alpha)[W(\alpha)\Theta'_n(\alpha)-2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)],$$

le diviseur devient, par suite,

$$f'^2_n(\alpha)\left[W(\alpha)+\frac{W(\alpha)\Theta'_n(\alpha)-2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}h\right],$$

et le quotient

$$\frac{A_n\Theta_n(\alpha)}{f'^2_n(\alpha)W(\alpha)}\left[1+\frac{2V(\alpha)}{W(\alpha)}h\right];$$

d'où l'on déduit la relation suivante

$$q_\alpha=2p_\alpha\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}.$$

Je pose maintenant

$$\sum\frac{p_\alpha}{x-\alpha}=\frac{\varphi_n}{f_n},$$

$$\sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha}=\frac{P_n}{f_n},$$

en sorte que l'on ait

$$(4)\qquad \frac{A_n \Theta_n}{W f_n^2} = \frac{G_n}{W} + \frac{P_n}{f_n} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi_n}{f_n} \quad [1];$$

et je considère l'expression

$$\frac{P_n}{f_n} - 2\frac{V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \sum\left(q_\alpha - \frac{2V}{W}p_\alpha\right)\frac{1}{x-\alpha}.$$

L'identité démontrée plus haut,

$$q_\alpha = 2\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}p_\alpha,$$

montre que cette expression ne devient infinie pour aucun des zéros de f_n; on a donc, H_n désignant un polynôme entier,

$$(5)\qquad \frac{P_n}{f_n} - \frac{2V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \frac{H_n}{W}.$$

Éliminons P_n entre les identités (4) et (5), il viendra, après avoir chassé le dénominateur,

$$A_n\Theta_n = (G_n + H_n)f_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n);$$

et de là résulte la proposition que je voulais démontrer.

Θ_n étant, en effet, d'un degré au plus égal à μ, il est clair que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z qui satisfait à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + G_n + H_n.$$

II.

5. Pour déterminer complètement l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur f_n d'une réduite, il est nécessaire de connaître les polynômes Θ_n et K_n qui y figurent.

---

[1] Il résulte d'une remarque importante due à M. Hermite que la détermination des polynômes G_n, P_n et φ_n n'exige pas la résolution de l'équation $f_n = 0$.

Afin de trouver leur expression ou de montrer au moins comment on peut les calculer par voie de récurrence, je m'appuierai sur les considérations suivantes.

On sait qu'entre les termes de deux réduites consécutives on a la relation suivante

$$\varphi_{n+1} f_n - f_{n+1} \varphi_n = A_{n+1},$$

A_{n+1} étant une constante dont on peut choisir arbitrairement la valeur, puisque les deux termes de la réduite ne sont déterminés qu'à un facteur constant près; je supposerai que cette constante est précisément celle que j'ai introduite dans l'identité (2).

Cela posé, de la relation précédente et de la relation

$$(6) \qquad \varphi_n f_{n-1} - f_n \varphi_{n-1} = A_n$$

qui s'en déduit, on tire

$$(A_n \varphi_{n-1} + A_{n+1} \varphi_{n-1}) f_n = (A_n f_{n+1} + A_{n+1} f_{n-1}) \varphi_n;$$

d'où, en posant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = R_n,$$

les formules suivantes, où Q_n est un polynôme du premier degré,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Portons maintenant, dans la relation (2), la valeur de A_n tirée de l'équation (6), cette relation pourra se mettre sous la forme suivante

$$(U f_n + V \varphi_n - W \varphi'_n + \Theta_n \varphi_{n-1}) f_n = (\Theta_n f_{n-1} - W f'_n - V f_n) \varphi_n;$$

d'où ces formules, où Ω_n désigne un polynôme entier,

$$(8) \qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + U f_n. \end{cases}$$

6. Ω_n est un polynôme entier dont il est facile de déterminer le degré; on déduit, en effet, de la première des formules (8)

$$\Omega_n = V + W\frac{f'_n}{f_n} - \Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n};$$

il en résulte que le terme du degré le plus élevé de ce polynôme est le premier terme du développement de l'expression $V + \frac{nW}{x}$; la fraction $\Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n}$ est, en effet, du degré de $V\left(\frac{1}{x^2}\right) + W\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

7. En dérivant la première des identités (7) et en multipliant par W le résultat obtenu, il vient

$$Wf'_{n+1} - WQ_nf'_n - WQ'_nf_n + WR_nf'_{n-1} = 0;$$

on a, d'ailleurs, les identités

$$\begin{aligned}
Wf'_{n+1} &= (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + \Theta_{n+1}f_n,\\
Wf'_n &= (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1},\\
Wf'_{n-1} &= (\Omega_{n-1} - V)f_{n-1} + \Theta_{n-1}f_{n-2};
\end{aligned}$$

portant ces valeurs dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned}
(\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)]f_n\\
&+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Omega_{n-1}f_{n-2} = 0,
\end{aligned}$$

puis, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_nf_n - R_nf_{n-1}$,

$$\begin{aligned}
&[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) - WQ'_n + \Theta_{n+1}]f_n\\
&\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

On a, d'ailleurs,

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0;$$

d'où les deux formules suivantes :

(9) $$Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} = WQ'_n,$$

(10) $$R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) = \frac{R_n}{R_{n-1}} Q_{n-1}\Theta_{n-1} - Q_n\Theta_n.$$

8. On déduit de la première des identités (8)

$$Wf''_n = (\Omega_n - V - W')f'_n + (\Omega'_n - V')f_n + \Theta_n f'_{n-1} + \Theta'_n f_{n-1}$$

ou, en multipliant par W et remplaçant Wf'_n et Wf'_{n-1} par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} W^2 f''_n = & [(\Omega_n - V - W')(\Omega_n - V) + W(\Omega'_n - V')]f_n \\ & + [\Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1} - 2V - W') + W\Theta'_n]f_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}f_{n-2}; \end{aligned}$$

portons cette valeur et la valeur précédemment trouvée de Wf'_n dans la relation

$$W^2\Theta_n f''_n + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n]Wf'_n + K_n Wf_n = 0;$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} \{\Theta_n(\Omega_n^2 - V^2) + W[\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n]\}f_n \\ + \Theta_n^2(\Omega_n + \Omega_{n-1})f_{n-1} + \Theta_n^2\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Le polynôme qui multiplie W dans le coefficient de f_n est évidemment divisible par Θ_n; posant donc

$$\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n = -\Theta_n S_n;$$

d'où l'on déduit

(11) $$K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n,$$

l'identité précédente deviendra

$$(\Omega_n^2 - V^2 - WS_n)f_n + \Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1})f_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0,$$

où S_n désigne un polynôme entier.

Ayant, d'ailleurs, la relation

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

on déduit de là les formules suivantes :

(12) $$\Omega_n^2 - V^2 - \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = WS_n,$$

(13) $$\Omega_n + \Omega_{n-1} = - \frac{\Theta_{n-1} Q_{n-1}}{R_{n-1}}.$$

9. De la relation (12) résulte l'égalité

$$W(S_{n+1} - S_n) = (\Omega_{n+1} - \Omega_n)(\Omega_{n+1} + \Omega_n) - \frac{\Theta_{n+1}\Theta_n}{R_n} + \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}}$$

ou, en remplaçant $\Omega_{n+1} + \Omega_n$ par sa valeur déduite de l'identité (13),

$$W(S_{n+1} - S_n) = \Omega_n \left[- \frac{\Theta_{n+1}}{R_n} + \frac{\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} - \frac{Q_n}{R_n}(\Omega_{n+1} - \Omega_n) \right]$$

ou encore, en vertu de (9),

$$W(S_{n+1} - S_n) = - \frac{WQ'_n \Theta_n}{R_n};$$

d'où enfin

(14) $$S_{n+1} - S_n = - \frac{Q'_n \Theta_n}{R_n}.$$

III.

10. Je résumerai ici les conséquences très simples de l'analyse un peu longue qui précède.

On a, entre les termes des diverses réduites, les relations suivantes

(7) $$\begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} Wf'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W\varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + V f_n, \end{cases}$$

où R_n désigne un nombre que l'on peut choisir arbitrairement, Θ_n un polynôme entier du degré μ, Ω_n un polynôme entier du degré $\mu+1$ dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, et Q_n un polynôme du premier degré.

Ces polynômes sont reliés entre eux par les relations suivantes

$$(9) \qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1} = WQ'_n,$$

$$(13) \qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = -\frac{\Theta_n Q_n}{R_n};$$

on a, en outre, l'égalité suivante, où S_n est un polynôme entier,

$$(12) \qquad \Omega_n^2 - V^2 - \frac{\Theta_n\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = WS_n.$$

On peut ajouter que, si l'on pose, pour abréger,

$$K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n,$$

f_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(3) \qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n]y' + K_n y = 0$$

11. Je me propose maintenant de montrer que les relations (9) et (13) suffisent pour déterminer par voie récurrente les polynômes Q_n, Θ_n et Ω_n, et, à cet effet, j'établirai le lemme suivant :

Lemme. — *Si des polynômes f_n, φ_n, Q_n, Θ_n, Ω_n et les nombres R_n sont liés entre eux par les relations* (7), (9) *et* (13) *et si l'on définit deux suites de polynômes A_n et B_n par les égalités suivantes :*

$$A_n = (\Omega_n - V)f_n - Wf'_n + \Theta_n f_{n-1},$$
$$B_n = (\Omega_n + V)\varphi_n - W\varphi'_n + \Theta_n\varphi_{n-1},$$

on a, entre trois polynômes consécutifs de chacune des suites, les relations

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0$$

et

$$B_{n+1} - Q_n B_n + R_n B_{n-1} = 0.$$

Démonstration. — Je ne m'occuperai que des polynômes A_n, la marche à suivre étant exactement la même pour les polynômes B_n.

On a, en vertu même de la définition donnée,

$$Wf'_n = (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1} - A_n$$

et de même

$$Wf'_{n+1} = (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n - A_{n+1},$$

$$Wf'_{n-1} = (\Omega_{n-1} - V)f_{n-1} + \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n-1}.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité

$$Wf'_{n+1} = Q_n Wf'_n + WQ'_n f_n + R_n Wf'_{n-1}$$

qui résulte immédiatement de la première des équations (7); il viendra

$$\begin{aligned}(\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)]f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n\Theta_n]f_{n-1} \\ &+ R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned}&[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - WQ'_n]f_n \\ &- [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n\Theta_n]f_{n-1} \\ &+ R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou encore, en vertu des identités (9) et (13),

$$\begin{aligned}\frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1}f_n &- \frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1}Q_{n-1}f_{n-1} \\ &+ R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Ce qui, par suite de l'identité,

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0,$$

se réduit à

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0.$$

Une démonstration analogue s'appliquerait aux polynômes B.

12. Supposons maintenant que l'on ait déterminé trois suites de polynômes Θ_n, Ω_n et Q_n par les relations (9) et (13), puis deux suites de polynômes φ_n et f_n par les relations (7); qu'enfin, pour deux valeurs consécutives de l'indice, on ait

$$A_i = A_{i-1} = 0 \quad \text{et} \quad B_i = B_{i-1} = 0.$$

Il résulte du lemme précédent que l'on a également

$$A_{i+1} = A_{i+2} = A_{i+3} = \ldots = 0$$

et

$$B_{i+1} = B_{i+2} = B_{i+3} = \ldots = 0,$$

et, par suite, les polynômes φ_n et f_n satisfont aux équations (8).

Or, en éliminant Ω_n, on en déduit

$$W(f'_n\varphi_n - \varphi'_n f_n) = -2V\varphi_n f_n + \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}) - Uf_n^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}),$$

et, $(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1})$ étant une constante en vertu des relations (7), on voit que le second membre est un polynôme du degré μ, et, par suite, la fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

13. Ainsi toute la question est ramenée à déterminer par les identités (9) et (13) les polynômes Q_n, Θ_n et Ω_n.

Si l'on met en évidence leurs coefficients inconnus, en égalant à zéro les multiplicateurs des puissances de x, on obtiendra un certain nombre d'équations qui permettront de déterminer les coefficients de Q_n, Ω_{n+1}, Θ_{n+1} au moyen des coefficients de Ω_n, Θ_n et Θ_{n-1}.

IV.

14. Comme application, je considérerai d'abord le cas le plus simple, à savoir : celui où les fonctions Θ_n sont des constantes et où $\mu = 0$.

C'est ce qui a lieu si W est au plus du second degré et si V est au plus du premier degré.

Comme Θ_n est une constante et que R_n, jusqu'à présent, est resté arbitraire, je poserai

$$\Theta_n = R_n,$$

et les équations (12) et (13) deviendront alors

$$(15)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = - Q_n,$$

$$(16)\qquad \Omega_n^2 - V^2 - R_n = WS_n,$$

et, ayant déterminé les polynômes entiers qui satisfont à ces équations, on aura les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} W f_n' = (\Omega_n - V) f_n + R_n f_{n-1}, \\ W \varphi_n' = (\Omega_n + V) \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} + U f_n; \end{cases}$$

en outre, f_n satisfait à l'équation différentielle

$$Wy'' + (2V + W')y' - (\Omega_n' - V' + S_n)y = 0,$$

où le coefficient de y est nécessairement une constante.

15. Considérons, par exemple, la fonction $z = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)z' = 2x,$$

on a ici

$$W = x^2 - 1, \quad V = 0 \quad \text{et} \quad U = 2x.$$

Le polynôme Ω_n, dont le terme du degré le plus élevé est le premier

terme du développement de $n\frac{x^2-1}{x}$, est de la forme

$$nx+\alpha_n,$$

l'identité

$$(nx+\alpha_n)^2-R_n=(x^2-1)S_n$$

donne

$$\alpha_n=0,\quad R_n=n^2,\quad S_n=n^2;$$

d'où, en vertu de l'équation (15),

$$Q_n=-(2n+1)x;$$

puis les relations

$$f_{n+1}+(2n+1)xf_n+n^2f_{n-1}=0,$$
$$\varphi_{n+1}+(2n+1)x\varphi_n+n^2\varphi_{n-1}=0;$$
$$(x^2-1)f'_n=nxf_n+n^2f_{n-1},$$
$$(x^2-1)\varphi'_n=nx\varphi_n+n^2\varphi_{n-1}+2xf_n;$$

d'où l'on déduirait aisément les relations connues entre les polynômes X_n de Legendre.

L'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait f_n est, d'ailleurs,

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

16. Comme second exemple, je choisirai la fonction

$$z=e^x x^{-\alpha}\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz'=(x-\alpha)z-1;$$

son développement suivant les puissances décroissantes de x est, d'ailleurs, la série

$$\frac{1}{x}+\frac{\alpha-1}{x^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^3}+\cdots,$$

qui, si elle ne se termine pas, est toujours divergente, quelle que soit la valeur donnée à x.

On a ici

$$W = x,\quad V = \frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2},\quad U = -1.$$

Le terme du degré le plus élevé de Ω_n étant le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, on peut poser

$$\Omega_n = \frac{x}{2} + \beta_n.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x + 1 - \alpha)y' - S_n y = 0;$$

d'où résulte évidemment $S_n = n$.

L'identité

$$S_n W = nx = \left(\frac{x}{2} + \beta_n\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - R_n$$

donne alors

$$\beta_n = n - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad R_n = n(n-\alpha);$$

d'où

$$Q_n = -x - \beta_n - \beta_{n+1} = -x + \alpha - 2n - 1,$$

et les formules suivantes

$$f_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha)f_n - n(n-\alpha)f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha)\varphi_n - n(n-\alpha)\varphi_{n-1};$$

ou plutôt si l'on change les signes des deux termes des réduites de rang impair (ce qui est permis, puisque cela ne change pas la valeur de la réduite),

$$(17)\qquad \begin{cases} f_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha)f_n - n(n-\alpha)f_{n-1}, \\ \varphi_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha)\varphi_n - n(n-\alpha)\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Un calcul direct donne d'ailleurs les valeurs suivantes pour les termes des premières réduites,

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x + 1 - \alpha, \quad f_2 = x^2 + 2(2 - \alpha)x + (2 - \alpha)(1 - \alpha)$$

et

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = x + 3 - \alpha;$$

en sorte que les formules précédentes permettent de calculer facilement, par voie récurrente, les valeurs de f_n et de φ_n.

17. En partant de l'équation différentielle

$$(18) \qquad xy'' + (x + 1 - \alpha)y' - ny = 0,$$

à laquelle satisfait le polynôme f_n, on trouve aisément

$$f_n = x^n + n(n - \alpha)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n - \alpha)(n - \alpha - 1)x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (n - \alpha)(n - \alpha - 1)\ldots(1 - \alpha).$$

Une deuxième solution de l'équation (18) est donnée (n° **5**) par la fonction

$$u_n = e^{-2\int \frac{V}{W}dx}(z f_n - \varphi_n) = f_n \int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - x^\alpha e^{-x}\varphi_n;$$

il est facile de trouver une autre expression de u_n.

En effet, en dérivant n fois l'équation (18), il vient

$$xy^{(n+2)} + (x + n + 1 - \alpha)y^{(n+1)} = 0;$$

d'où l'on voit que $y^{(n+1)}$ est égal, à une constante près, à $\frac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}$.

Par suite on a, K désignant une constante et $F(x)$ un polynôme entier,

$$y = F(x) + K\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z - x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

La fonction u_n est en particulier donnée par cette formule, et, comme elle s'évanouit quand on donne à x une valeur positive infiniment croissante, on a simplement

$$u_n = f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx - x^\alpha e^{-x} \varphi_n = \mathrm{K} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

Si l'on suppose x et n constants (et je supposerai x positif, en sorte que les intégrales contenues dans l'égalité précédente sont toujours finies, quel que soit α), K est une fonction de α bien déterminée.

Pour en trouver la valeur, je supposerai que l'on fait tendre x vers zéro et que α a une valeur positive; de l'égalité précédente, on déduit alors

$$f_n(0)\Gamma(\alpha) = \mathrm{K}\,\Gamma(\alpha),$$

d'où

$$\mathrm{K} = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)$$

et, par suite,

$$f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx - z^\alpha e^{-x} \varphi_n = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha) \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

18. On tire de là

$$\int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = e^{-x} x^\alpha \frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}};$$

l'intégrale contenue dans le second membre a une valeur finie, car elle a une valeur plus petite que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dx;$$

il serait même facile de démontrer qu'elle tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{f_n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} = 1 + \frac{n}{1}\frac{x}{1-\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \cdots;$$

quel que soit le nombre α, les termes de ce développement finiront par être tous du même signe, et, comme leur degré par rapport à n va toujours en croissant, on voit que la valeur absolue de la série croîtra indéfiniment avec le nombre n.

Le coefficient

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}$$

a ainsi pour limite zéro, et l'on a

$$\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x}x^\alpha \lim\frac{\varphi_n}{f_n}.$$

Les réduites $\frac{\varphi_n}{f_n}$, quoique provenant de la réduction en fractions continues d'une série divergente, fournissent donc, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, pourvu que x ait une valeur positive.

19. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-t^2dt};$$

en posant $t=\sqrt{z}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}},$$

dont la valeur approximative, en prenant seulement la réduite $\frac{\varphi_1}{f_1}$, est

$$\frac{ae^{-a^2}}{2a^2+1}.$$

Faisant $a=3$, on trouve, comme valeur approchée,

$$\frac{3e^{-9}}{19} = 0{,}00001954,$$

dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts

20. Les formules précédentes permettent de calculer aisément les valeurs de la fonction de Prym,

$$eQ(\alpha) = \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Que l'on désigne, en effet, par $F_0(\alpha)$, $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, ..., $\Phi_0(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$, ... deux suites de polynômes liés entre eux par les relations suivantes :

$$F_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)\,F_n(\alpha) - n(n-\alpha)\,F_{n-1}(\alpha),$$
$$\Phi_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)\,\Phi_n(\alpha) - n(n-\alpha)\,\Phi_{n-1}(\alpha);$$

avec les valeurs initiales

$$F_0(\alpha) = 1, \quad F_1(\alpha) = 2-\alpha,$$
$$\Phi_0(\alpha) = 0, \quad \Phi_1(\alpha) = 1;$$

il résulte des formules précédentes que l'on a

$$eQ(\alpha) = \lim \frac{\Phi_n(\alpha)}{F_n(\alpha)}.$$

Soit, par exemple, $x = 1$.

On obtiendra successivement, pour les valeurs approximatives de $eQ(0)$, les valeurs suivantes

$$\frac{4}{7},\ \frac{20}{34},\ \frac{124}{209},\ \frac{920}{1546},\ \frac{7940}{13327},\ \ldots,$$

qui vont en croissant et en restant inférieures à la valeur cherchée.

Il est facile d'obtenir d'autres suites de nombres allant constamment en diminuant et ayant cette valeur pour limite ; on trouve en effet les expressions suivantes des réduites du nombre $eQ(-1)$,

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{13},\ \frac{29}{73},\ \frac{201}{501},\ \frac{1631}{4051}.$$

De la formule connue

$$Q(o) = 1 - Q(-1)$$

on déduit que les fractions

$$1, \frac{2}{3}, \frac{8}{13}, \frac{44}{73}, \frac{300}{501}, \frac{2420}{4051}$$

ont pour limite Q(o).

Ces fractions sont plus simples et convergent plus rapidement que les fractions déterminées plus haut; elles vont d'ailleurs toujours en décroissant.

En particulier, on a

$$\frac{2420}{4051} = 0,5973\ldots$$

et

$$\frac{7940}{13327} = 0,5958\ldots;$$

ces deux fractions comprenant la valeur de $e\,Q(o)$, on a, avec une erreur de moins de $\frac{1}{1000}$,

$$e\,Q(o) = 0,5965.$$

Le développement en série donne (§ *Compendium de Schlömilch*, t. II, p. 266)

$$e\,Q(o) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{2}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{14}{2.3.4.5.6} + \frac{38}{2.3.4.5.6.7}.$$

La convergence est sensiblement moins rapide que celle des réduites.

V.

21. Pour les applications qui suivent, afin de simplifier les formules, je prendrai le nombre A_n, qui était resté arbitraire, égal à l'unité.

Les relations qui existent entre les termes des réduites et les polynômes Q_n, Θ_n et Ω_n deviennent alors

$$
(\text{A})\quad
\left\{
\begin{aligned}
& U f_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = \Theta_n, \\
& \varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = 1, \\
& f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0, \\
& \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0, \\
& W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\
& W \varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + U f_n ;
\end{aligned}
\right.
$$

et les identités qui déterminent les polynômes Q_n, Θ_n et Ω_n,

$$
(19)\qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \Theta_{n-1} = WQ'_n,
$$

$$
(20)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = - Q_n \Theta_n ;
$$

on peut y joindre la relation

$$
(21)\qquad \Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n \Theta_{n-1} = WS_n,
$$

où S_n désigne un polynôme entier.

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est d'ailleurs

$$
\begin{aligned}
W\Theta_n y'' &+ [(2V + W') - W\Theta'_n]\, y' \\
&- [\Theta_n S_n + \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V)]\, y = 0.
\end{aligned}
$$

22. Pour fixer les idées, je supposerai que le développement de z commence par un terme qui soit au moins du degré de $\frac{1}{x}$.

Pour le dénominateur de la réduite de rang zéro, je prendrai l'unité, en sorte que l'on aura $f_0 = 1$ et que φ_0 sera l'ensemble des termes entiers de z (lequel pourra se réduire à zéro).

Je considérerai les deux quantités

$$
\frac{-1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{z}{-1}
$$

comme constituant deux réduites précédentes, en posant

$$f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1$$

et

$$f_{-2} = -1, \quad \varphi_{-2} = 2.$$

Il est facile de voir, en effet, qu'en posant

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0, \quad \Theta_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = V, \quad \Omega_{-1} = -V,$$

toutes les relations du tableau (A) qui existent entre les réduites consécutives sont satisfaites.

On aura donc

$$\Theta_{-1} = 0, \quad \Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0$$

et

$$\Omega_0 = V.$$

23. Soit, comme exemple, la fonction

$$z = \sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1} \int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle du premier ordre

$$(x^4 + 2\lambda x^2 + 1) z' = 2(x^3 + \lambda x) z - (x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on a ici

$$W = x^4 + 2\lambda x^2 + 1, \quad V = x^3 + \lambda x, \quad U = -(x^4 + 2\lambda x^2 + 1).$$

Je remarquerai tout d'abord que, z étant une fonction impaire de x, les polynômes φ_n et f_n sont des fonctions paires ou impaires de la variable, et que le produit $\varphi_n f_n$ est une fonction impaire.

Il en résulte que Θ_n est une fonction paire, et l'on peut poser

$$\Theta_n = a_n x^2 + b_n;$$

Ω_n est une fonction impaire dont le terme de degré le plus élevé est le premier terme du développement de

$$V + \frac{nW}{x} = x^3 + \lambda x + \frac{n}{x}(x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on peut donc poser

$$\Omega_n = (n+1)x^3 + \alpha_n x;$$

enfin Q_n, qui est une fonction impaire, sera de la forme $A_n x$.

Portons ces valeurs dans les identités (19) et (20); en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtiendra les formules suivantes :

$$A_n = -\frac{2n+3}{a_n},$$

$$(22)\qquad \begin{cases} a_{n+1} = -\alpha_n + (2n+3)\dfrac{b_n}{a_n}, \\ b_{n+1} = b_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}, \\ a_{n+1} = a_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}(2\lambda + \alpha_n - \alpha_{n+1}), \end{cases}$$

dont les trois dernières permettent de calculer de proche en proche, et par voie récurrente, les nombres α_i, a_i et b_i.

La première donne les relations suivantes entre les réduites consécutives :

$$f_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x f_n + f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

En exprimant que

$$[(n+1)x^3 + \alpha_n x]^2 - (x^3 + \lambda x)^2 - (a_n x^2 + b_n)(a_{n-1}x^2 + b_{n-1})$$

est exactement divisible par $x^4 + 2\lambda x^2 + 1$, on obtient encore les relations

$$(23)\qquad \begin{cases} a_n a_{n-1} - b_n b_{n-1} = 2(n+1)\alpha_n - 2\lambda(n+1)^2, \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 2\lambda b_n b_{n-1} = \alpha_n^2 - \lambda^2 - n(n+2); \end{cases}$$

et l'on trouve la valeur suivante du quotient :

$$S_n = n(n+2)x^2 + 2(n+1)\alpha_n - a_n a_{n-1} - 2\lambda(n+1)^2.$$

24. La partie entière du développement de z étant simplement x, on a ces valeurs des premières réduites

$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = x, \quad f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1,$$

puis

$$\Theta_{-1} = 0, \quad \Theta_0 = -2\lambda x^2 - 2, \quad \Omega_0 = x^2 + \lambda x,$$

d'où les valeurs initiales suivantes

$$\alpha_0 = \lambda, \quad a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = -2\lambda, \quad b_0 = -2,$$

d'où, au moyen des formules (22), on déduit successivement les valeurs des coefficients α_i, a_i et b_i, à savoir

$$\alpha_1 = -\lambda + \frac{3}{\lambda}, \quad \ldots,$$

$$a_1 = 6 - \frac{9}{2\lambda^2}, \quad \ldots,$$

$$b_1 = \frac{3}{2\lambda}, \quad \ldots.$$

Les relations (23) fournissent des moyens faciles de vérification.

25. Soit encore à déterminer les réduites de la fonction z dont le développement, suivant les puissances décroissantes de x, satisfait à l'équation différentielle

$$x^3 z' = 2(x^2 + px + q)z + rx + s.$$

On a ici

$$W = x^3, \quad V = x^2 + px + q, \quad U = rx + s;$$

on peut poser

$$\Omega_n = (n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n,$$
$$\Theta_n = a_n x + b_n,$$
$$Q_n = A_n x + B_n.$$

Cela posé, des identités (19) et (20) on déduit

$$(A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + \beta_{n+1} - \beta_n]$$
$$+ (a_{n+1} - a_n)x + b_{n+1} - b_n = A_n x^3$$

et

$$(2n+3)x^2+(\alpha_{n+1}+\alpha_n)x+\beta_{n+1}+\beta_n=-(a_nx+b_n)(A_nx+B_n);$$

d'où les relations suivantes

$$(24)\quad\begin{cases}\alpha_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}\alpha_n+\dfrac{2n+3}{2n+4}\dfrac{b_n}{a_n},\\ \beta_{n+1}=-\beta_n-(2n+3)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\dfrac{b_n}{a_n},\\ a_{n+1}=a_{n-1}+\dfrac{2n+3}{a_n}(\beta_{n+1}-\beta_n)-\dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1}-\alpha)^2,\\ b_{n+1}=b_{n-1}-\dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)(\beta_{n+1}-\beta_n),\end{cases}$$

qui permettront de calculer, par voie de récurrence, les nombres α_i, β_i et a_i, b_i.

On aura, d'ailleurs,

$$Q_n=\frac{2n+3}{a_n}(-x+\alpha_{n+1}-\alpha_n),$$

d'où l'on déduira successivement les valeurs des réduites par les formules

$$f_{n+1}=Q_nf_n-f_{n-1},$$

$$\varphi_{n+1}=Q_n\varphi_n-\varphi_{n-1}.$$

26. Le polynôme

$$[(n+1)x^2+\alpha_nx+\beta_n]^2-(x^2+px+q)^2-(a_nx+b_n)(a_{n-1}x+b_{n-1})$$

devant être divisible par x^3, on a encore ces identités

$$(25)\quad\begin{cases}a_na_{n-1}=\alpha_n^2+2(n+1)\beta_n-p^2-2q,\\ a_nb_{n-1}+b_na_{n-1}=2\alpha_n\beta_n-2pq,\\ b_nb_{n-1}=\beta_n^2-q^2,\end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (24) et qui peuvent servir, soit

comme vérification des calculs, soit pour déterminer les coefficients a_i et b_i.

On a d'ailleurs, puisque le développement de z ne renferme pas de partie entière,

$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = 0;$$

par suite,

$$\Omega_0 = V = x^2 + px + q$$

et

$$\Theta_0 = U = rx + s.$$

On a donc les valeurs initiales suivantes

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = r, \quad b_0 = s, \quad \alpha_0 = p, \quad \beta_0 = q;$$

d'où l'on déduit, par voie de récurrence, la suite des nombres qui déterminent les polynômes Q_n.

27. Ayant

$$\begin{aligned}[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_n) \\ = x^3[n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p],\end{aligned}$$

on en déduit

$$S_n = n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p.$$

Dans le cas où il y a surapproximation, Θ_n doit se réduire à une constante; on a donc

$$a_n = 0,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n devient

$$x^3 y'' + (5x^2 + 2px + 2q)y' - [n(n+4)x + (2n+3)\alpha_n - 3p] = 0.$$

Réciproquement, si l'on détermine la quantité α_n, de telle sorte que l'équation précédente ait pour solution un polynôme entier f_n, on peut déterminer les quantités r et s, de telle sorte que le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de z soit f_n.

28. Comme dernière application, je considérerai la fonction

$$z = (x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 + 3gx + h)z' = 2\mu(x^2 + g)z - (x^3 + 3gx + h).$$

On a, dans ce cas,

$$W = x^3 + 3gx + h, \quad V = \mu(x^2 + g) \quad \text{et} \quad U = -(x^3 + 3gx + h),$$

et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \Omega_n &= (n + \mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n, \\ \Theta_n &= a_n x + b_n, \\ Q_n &= A_n x + B_n. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les relations (19) et (20), on obtient les égalites suivantes, qui doivent être identiquement satisfaites,

$$\begin{gathered} (A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + (\beta_{n+1} - \beta_n)] \\ + (a_{n+1} - a_{n-1})x + b_{n+1} - b_n = A_n(x^3 + 3gx + h), \\ (2n + 2\mu + 1)x^2 \\ + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(A_n x + B_n)(a_n x + b_n), \end{gathered}$$

d'où l'on deduit

$$Q_n = -\frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(x + \alpha_n - \alpha_{n+1}),$$

(26)
$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{n + \mu}{n + \mu + 1}\alpha_n + \frac{2n + 2\mu + 1}{2n + 2\mu + 2}\frac{b_n}{a_n}, \\ \beta_{n+1} &= -\beta_n - (2n + 2\mu + 1)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\frac{b_n}{a_n}, \\ a_{n+1} &= a_{n-1} + \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n - 3g) - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2, \\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}h. \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent de calculer successivement les nombres a_i, b_i, α_i, β_i et par suite les quotients incomplets Q_i.

On a d'ailleurs

$$\Theta_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = \mu(x^2 + g),$$

et, comme la partie entière du développement de r est $\frac{x}{2\mu - 1}$,

$$f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1,$$

$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = \frac{x}{2\mu - 1};$$

d'où

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0 = \frac{2\mu}{1 - 2\mu}(2gx + h),$$

et par suite les valeurs initiales suivantes

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{4\mu g}{1 - 2\mu}, \quad b_0 = \frac{2\mu h}{1 - 2\mu}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \mu g;$$

d'où l'on déduira successivement, au moyen des formules (26), les valeurs de

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots.$$

29. On obtient un autre système de formules qui permet également de calculer a_n et b_n et que l'on peut considérer comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (26).

Il s'obtient en exprimant que le polynôme

$$\Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n\Theta_{n-1} = [(n+\mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - \mu^2(x^2+g)^2 - (a_n x + a_{n-1})(b_n x + b_{n-1})$$

est exactement divisible par

$$W = x^3 + 3gx + h.$$

De là résultent les relations suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} a_n a_{n-1} = \alpha_n^2 + 2(n+\mu)\beta_n - 2g\mu^2 - 3gn(n+2\mu), \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} = 2\alpha_n\beta_n - 6g(n+\mu)\alpha_n - hn(n+2\mu), \\ b_n b_{n-1} = \beta_n^2 - 2h(n+\mu)\alpha_n - \mu^2 g^2. \end{cases}$$

Il est important de remarquer que l'on a ainsi trois relations pour déterminer a_n et b_n; d'où cette conséquence que, si l'on pose

$$\frac{b_n}{a_n} = \lambda,$$

λ est une racine d'une équation du second degré de la forme

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de g, h, α_n, β_n, ces deux dernières quantités étant elles-mêmes des fonctions rationnelles de g et de h.

L'autre racine de l'équation est évidemment la valeur de $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$.

Il résulte de là, en particulier, que l'expression

$$Q^2 - PR$$

est le carré d'une fonction rationnelle de g et de h.

Mais c'est un point que je me réserve de traiter plus tard en essayant, du moins dans des cas particuliers, d'intégrer les systèmes d'équations aux différences finies (**26**) et (**27**).

VI.

30. Les formules précédentes permettent, pour une valeur donnée de x, de calculer de la façon la plus simple les valeurs des réduites d'une fonction z qui satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont rationnels.

Au point de vue du calcul numérique, la solution peut être regardée comme complète; mais, si l'on veut déterminer effectivement par des expressions analytiques les valeurs des coefficients des quotients incomplets, on est conduit à intégrer un système d'équations aux différences ordinaires dans lequel le nombre des quantités inconnues est d'autant plus grand que le degré du polynôme Θ_n est plus élevé.

L'intégration de ces équations semble, en général, présenter d'assez

grandes difficultés; nous savons en effet que, dans un cas particulier relativement simple étudié par Jacobi et par Borchardt (à savoir celui où z est l'inverse de la racine carrée d'un polynôme entier), l'intégration dépend de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

Je reviendrai du reste sur ce point particulier, en essayant de compléter à certains égards les résultats obtenus par ces illustres géomètres.

Sur les courbes définies par les équations différentielles

(TROISIÈME PARTIE);

PAR M. H. POINCARÉ.

Les deux premières Parties de ce travail ont paru dans ce Journal, la première aux mois de novembre et décembre 1881 (3e série, t. VII) et la deuxième au mois d'août 1882 (3e série, t. VIII). Dans ce qui va suivre, je conserverai, malgré les objections auxquelles elles peuvent donner lieu, les dénominations employées dans les deux premières Parties, afin de n'avoir pas à donner de définitions nouvelles.

CHAPITRE X.

STABILITÉ ET INSTABILITÉ.

On n'a pu lire les deux premières Parties de ce Mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire. Ce dernier problème est, bien entendu, beaucoup plus compliqué, puisque les équations différentielles du mouvement des corps célestes sont d'ordre très élevé. Il y a même plus, on rencontrera, dans ce problème, une difficulté nouvelle, essentiellement différente de celles que nous avons eu à surmonter dans l'étude du premier ordre, et j'ai l'intention de la faire ressortir, sinon dans cette troisième Partie, du moins dans la suite de ce travail.

Mais, quoi qu'il en soit, si la solution exige de plus grands efforts et des procédés nouveaux, l'analogie des questions à résoudre n'en est pas moins évidente. Pour étudier l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

on peut poser

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Regardant ensuite x et y comme les coordonnées d'un point mobile, t comme le temps, on a à rechercher quel est le mouvement d'un point dont on donne la vitesse en fonction de ses coordonnées. C'est ce mouvement que nous avons étudié, et nous avons cherché à résoudre des questions, telles que celles-ci ; le point mobile décrira-t-il une courbe fermée? Restera-t-il toujours à l'intérieur d'une certaine portion du plan? En d'autres termes, et pour parler le langage astronomique, nous avons recherché si l'orbite de ce point était stable ou instable.

Nous pourrons nous poser des questions analogues, lorsque X et Y ne seront plus des polynômes en x et y, mais des fonctions algébriques de ces variables, ou bien encore lorsque l'équation différentielle sera d'ordre supérieur au premier.

Mais auparavant il importe de définir exactement ce qu'on doit entendre par stabilité ou instabilité. Pour cela, nous allons étudier les cinq équations qui suivent et qui nous donneront des exemples de tous les cas qui peuvent se présenter :

1° Soient d'abord

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x,$$

il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Les trajectoires étant des courbes fermées, la stabilité est complète.

2° Soient maintenant, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\omega}{dt} = h, \quad \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{1 - (\rho - 2)^2},$$

h étant une constante quelconque. Il serait aisé, d'ailleurs, de passer de cette équation en coordonnées polaires à l'équation correspondante en coordonnées rectangulaires, et l'on verrait que, si l'on met cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

X et Y ne seront plus des polynômes entiers en x et y, mais des fonctions algébriques de ces variables. L'équation différentielle sera encore du premier ordre, mais sera de degré supérieur.

On trouve immédiatement l'intégrale

$$\rho = 2 + \sin\left(\frac{\omega}{h} + C\right),$$

C étant une constante d'intégration.

Si h est commensurable avec 2π, la trajectoire est une courbe fermée, et l'on retombe sur le cas précédent. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Il arrivera alors que la trajectoire ne sera pas une courbe fermée; mais néanmoins elle jouira d'une certaine stabilité : on peut même dire d'une certaine périodicité d'une nature particulière. En effet, soit M un point de la trajectoire, occupé un temps t par le point mobile. Décrivons autour du point M un cercle de rayon r aussi petit que nous voudrons. Le point mobile partant du point M sortira évidemment de ce cercle, mais il viendra traverser de nouveau ce petit cercle une *infinité de fois*, et cela, quelque petit que soit r. En d'autres termes, le point mobile partant du point M ne pourra jamais revenir en ce point, mais il reviendra en des points infiniment voisins de M.

En second lieu, le point M restera toujours à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho = 3.$$

Mais sa trajectoire remplira entièrement cette couronne, sans laisser de lacune. Je veux dire que, dans toute aire plane, si petite qu'elle soit, située à l'intérieur de la couronne, il y a des points de la trajectoire.

Les Allemands diraient que la *Punktmenge*, formée par les différents points de la trajectoire, est *überalldicht* à l'intérieur de la couronne.

Ce second cas ne peut pas se présenter pour les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. C'est pourquoi nous ne l'avons jamais rencontré jusqu'ici

2° Soient maintenant, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\rho}{dt} = 1 + \rho^2, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{h}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} x - \frac{y}{h}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} y + \frac{x}{h}.$$

L'intégrale générale est

$$\rho = \text{tang}(h\omega + C),$$

C étant une constante d'intégration.

Ici encore, si h est incommensurable avec 2π, le point mobile ne peut jamais revenir à son point de départ, mais il peut revenir en des points infiniment voisins.

La différence avec le cas précédent, c'est que le point mobile n'est plus assujetti à rester dans une certaine région du plan, et que c'est le plan tout entier que la trajectoire remplit sans lacune (*überalldicht*).

Ce troisième cas ne peut, pas plus que le deuxième, se présenter pour les équations du premier ordre et du premier degré

4° Comme quatrième exemple, nous prendrons la spirale logarithmique dont l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\rho}{d\omega} = m\rho$$

ou bien

$$\frac{dx}{d\omega} = mx - y, \quad \frac{dy}{d\omega} = my + x.$$

L'intégrale générale est, comme on sait,

$$\rho = Ce^{m\omega}.$$

Soit M le point de départ du point mobile; si nous décrivons autour du point M un cercle de rayon suffisamment petit, nous verrons le point mobile, partant de M, sortir de ce cercle, et, après en être sorti, *n'y plus jamais rentrer*. C'est le contraire de ce qui se passait dans les trois cas examinés plus haut, et où le point mobile, après être sorti d'un cercle très petit, y rentrait ensuite une infinité de fois. A ce point de vue, on peut dire que la trajectoire est instable.

On sait que les cercles $\rho =$ const. sont, pour nos trajectoires, des *cycles sans contact*. De plus, tout le plan est sillonné par ces cycles sans contact, sans qu'il y ait de *cycles limites*. C'est à la présence de ces cycles sans contact qu'est due l'instabilité de la trajectoire.

5° Soit enfin l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho - 1)(\rho - 2).$$

Les cercles $\rho =$ const. sont encore des cycles sans contact, excepté les cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$, qui sont des cycles limites. L'intégrale générale étant

$$\rho = \frac{Ce^{\omega} - 2}{Ce^{\omega} - 1},$$

on voit aisément que la trajectoire est instable, c'est-à-dire que, après être sortie d'un cercle suffisamment petit décrit autour du point de départ, elle ne pourra plus y rentrer.

La différence avec le cas précédent tient à l'existence des cycles limites. Il en résulte que, si le point de départ est à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$, le point mobile restera toujours à l'intérieur de cette couronne.

Nous pouvons maintenant, en nous référant aux exemples précédents, donner une définition précise de la stabilité. Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r. C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples.

Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère,

le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

La stabilité ainsi définie n'a qu'une importance théorique. Pour la pratique, il faudrait déterminer une région de l'espace où le point mobile reste constamment renfermé. Il arrive justement que la détermination d'une pareille région est beaucoup plus difficile dans le cas de la stabilité que dans le cas de l'instabilité. Il y a là une difficulté, sur laquelle je ne veux pas insister dans ce moment, mais qui fera, dans la suite de ce travail, l'objet d'assez longs développements.

Dans les cas que nous avons étudiés jusqu'ici, c'est-à-dire pour les équations du premier ordre et du premier degré, les trajectoires sont des cycles, c'est-à-dire des courbes fermées ou des spirales (*voir* théorème XII, t. VIII, p. 255). Dans le premier cas, elles sont stables; dans le second, instables. On ne peut donc jamais rencontrer rien de semblable à ce que nous venons d'observer dans les deuxième et troisième exemples.

En général, le plan est sillonné d'une infinité de cycles sans contact et de cycles limites (théorème XVIII, t. VIII, p. 274). Toutes les trajectoires sont des spirales, excepté les cycles limites.

L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception.

Il peut arriver aussi, dans des cas très exceptionnels, que le plan, au lieu d'être sillonné par une infinité de cycles sans contact, est sillonné par une infinité de courbes fermées satisfaisant à l'équation différentielle proposée et formant un de ces systèmes que nous avons appelés *topographiques* (t. VII, p. 383). Il y a alors stabilité. C'est ce qui arrive en particulier dans le voisinage de ces points singuliers exceptionnels que j'ai appelés *centres* (t. VII, p. 391) et dont nous allons faire une étude plus approfondie.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES CENTRES.

Écrivons notre équation différentielle sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

de manière à lui faire représenter le mouvement d'un point mobile. Supposons que X et Y sont des polynômes de degré n en x et en y. Supposons de plus que nous ayons pris pour origine le point singulier que nous voulons étudier, de telle façon que X et Y s'annulent avec x et y. Nous pourrons écrire alors

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

X_i et Y_i étant des polynômes homogènes de degré i en x et en y. Cherchons maintenant si l'on peut former un polynôme F en x et en y, de telle façon que, dans l'expression

$$\Phi = \frac{dF}{dx} X + \frac{dF}{dy} Y,$$

qui est aussi un polynôme entier en x et en y, les termes de degré inférieur à p en x et en y soient tous nuls.

Nous pourrons écrire

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \ldots$$

(F_i étant homogène de degré i en x et en y), en supposant, ce qui est nécessaire pour notre objet, que F ne contienne pas de terme de degré 0 ou 1.

Posons ensuite

$$\Phi_{ik} = \frac{dF_i}{dx} X_k + \frac{dF_i}{dy} Y_k;$$

Φ_{ik} sera un polynôme homogène de degré $i + k - 1$.

Si nous écrivons que, dans Φ, tous les termes de degré inférieur à p sont nuls, il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi_{21} = 0, \\ \Phi_{31} = -\Phi_{22}, \\ \Phi_{41} = -\Phi_{32} - \Phi_{23}, \\ \Phi_{51} = -\Phi_{42} - \Phi_{33} - \Phi_{24}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{p-1\,1} = -\Phi_{p-2\,2} - \Phi_{p-3\,3} - \ldots - \Phi_{2\,p-2}. \end{cases}$$

La première de ces équations nous donnera F_2, la deuxième F_3, ..., et enfin la $p - 2^{\text{ième}}$ nous donnera F_{p-1}, *pourvu toutefois qu'il soit possible d'y satisfaire.*

Considérons d'abord la première équation.

Soient

$$F_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

$$X_1 = \alpha x + \beta y, \quad Y_1 = \gamma x + \delta y,$$

il vient

$$\tfrac{1}{2}\Phi_{21} = (ax + by)(\alpha x + \beta y) + (bx + cy)(\gamma x + \delta y),$$

de sorte que la première équation (1) entraîne les trois suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} a\alpha + b\gamma = 0, \\ a\beta + b(\alpha + \delta) + c\gamma = 0, \\ b\beta + c\delta = 0; \end{cases}$$

ces équations ne sont compatibles que si l'on a

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \alpha + \delta & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Nous supposerons de plus que les valeurs de a, b et c, que l'on tire des équations (2), sont telles que la forme F_2 soit définie positive.

Si ces deux conditions sont remplies, on retombera sur le *quatrième cas subordonné* dont nous avons dit quelques mots à la page 390 du Tome VII, mais que nous n'avons pas encore étudié à fond.

Si elles n'étaient pas remplies, au contraire, le point singulier serait un nœud, un foyer ou un col, et nous n'aurions rien à ajouter à ce que nous avons déjà dit au sujet de ces points. Nous supposerons donc ces deux conditions satisfaites.

La forme F_2 étant définie positive, nous pouvons toujours l'écrire sous la forme suivante :

$$(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2.$$

Si nous changeons ensuite de variables en posant

$$x' = (\lambda x + \mu y), \quad y' = (\lambda' x + \mu' y),$$

il viendra

$$F_2 = x'^2 + y'^2.$$

En conséquence, nous pouvons toujours supposer que

$$F_2 = x^2 + y^2;$$

car, si cela n'était pas, il suffirait d'un changement linéaire de variables pour ramener F_2 à cette forme. Nous ferons désormais cette hypothèse.

Quelles en sont les conséquences au sujet de X_1 et de Y_1?

Les équations (2) deviennent

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad \beta + \gamma = 0;$$

d'où

$$X_1 = \beta y, \quad Y_1 = -\beta x.$$

Les autres équations (1) s'écrivent alors

$$(4) \qquad y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} = H_q,$$

où F_q est un polynôme homogène de degré q qu'il s'agit de déterminer, pendant que H_q est un polynôme homogène de degré q qu'on peut considérer comme donné, puisqu'il ne dépend que des polynômes X et Y et des polynômes homogènes F_2, F_3, ..., F_{q-1} que l'on a dû calculer avant F_q.

Dans quel cas est-il possible de satisfaire à une équation de la forme (4)?

Pour résoudre cette question, nous allons passer aux coordonnées polaires en posant

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

Il viendra

$$y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy} = -\frac{dF}{d\omega}$$

et

$$F_q = \rho^q\varphi(\omega), \quad H_q = \rho^q\psi(\omega).$$

De plus, on aura

$$\varphi(\omega) = \Sigma A_k \cos k\omega + \Sigma B_k \sin k\omega,$$
$$\psi(\omega) = \Sigma C_k \cos k\omega + \Sigma D_k \sin k\omega.$$

Dans ces expressions, k ne pourra prendre que des valeurs inférieures ou au plus égales à q, et de même parité que q. En particulier, si q est impair, il ne pourra pas y avoir de terme tout connu (c'est-à-dire de terme où $k = 0$).

L'équation (4) s'écrit alors

$$-\frac{dz}{d\omega} = \psi(\omega).$$

Pour qu'on puisse y satisfaire, il faut et il suffit que $\psi(\omega)$ ne contienne pas de terme tout connu, c'est-à-dire que l'on ait

$$C_0 = 0.$$

Cette condition est remplie d'elle-même, comme nous venons de le voir, lorsque q est impair. Elle ne l'est pas, au contraire, en général, lorsque q est pair.

Si q est impair, il y a donc toujours une manière et une seule de satisfaire à l'équation (4); il suffit de poser

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}.$$

Si q est pair et si, cependant, C_0 est nul, il y a une infinité de manières de satisfaire à notre équation; on fera encore, en effet,

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

si k est différent de zéro, et l'on pourra choisir A_0 arbitrairement.

Qu'arrive-t-il enfin si q est pair et si C_0 n'est pas nul? Dans ce cas, il est impossible de satisfaire à l'équation (4), mais on peut choisir F_q, de telle façon que

$$y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} < H_q,$$

pour toutes les valeurs de x et de y si C_0 est positif.

Au contraire, si C_0 est négatif, on pourra choisir F_q, de telle façon que l'on ait toujours

$$y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} > H_q.$$

Il suffit, pour cela, de faire

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

pour toutes les valeurs de k différentes de zéro, A_0 restant arbitraire. Il vient alors

$$\psi(\omega) + \frac{d\varphi}{d\omega} = C_0$$

ou bien

$$H_q - y\frac{dF_q}{dx} + x\frac{dF_q}{dy} = C_0(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Soient, par exemple,

$$q = 4, \quad H_q = \beta x^4 - 2\alpha x^2 y^2 + \beta y^4.$$

Il viendra

$$H_4 = \rho^4\left(\frac{3\beta-\alpha}{4} + \frac{\alpha+\beta}{4}\cos 4\omega\right).$$

Faisons alors

$$F_4 = \rho^4\left(-\frac{\alpha+\beta}{16}\sin 4\omega\right) = -\frac{\alpha+\beta}{4}(x^2-y^2)xy.$$

Il viendra

$$H_4 = y\frac{dF_4}{dx} + x\frac{dF_4}{dy} = \frac{3\beta-\alpha}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Si $3\beta = \alpha$, le premier membre de cette équation est nul, et l'on a satisfait à l'équation (4). Si $3\beta > \alpha$, le premier membre est positif, quels que soient x et y. Si $3\beta < \alpha$, le premier membre est négatif, quels que soient x et y.

Cela posé, on voit aisément que l'on peut faire deux hypothèses :

1° On peut supposer d'abord que l'on puisse déterminer $F_2, F_3, \ldots, F_{q-1}$, de façon à satisfaire aux $q-2$ premières équations (1); mais qu'il soit impossible ensuite de déterminer F_q de façon à satisfaire à la

$q - 1^{\text{ième}}$ équation (1). Dans ce cas, q est nécessairement pair, et nous déterminerons F_q, comme il vient d'être dit, de telle façon que

$$H_q - y\frac{dF_q}{dx} + x\frac{dF_q}{dy} = C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Nous poserons ensuite

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_{q-1} + F_q.$$

Je dis que, si k est une constante positive suffisamment petite, l'équation

$$F = k$$

représentera une courbe fermée qui sera un cycle sans contact.

En effet, si ρ est suffisamment petit (plus petit que ρ_0, par exemple), la fonction F va en décroissant quand ρ décroît de ρ_0 à zéro, ω restant constant; car, si ρ est très petit, c'est $\frac{dF_2}{d\rho} = 2\rho$ qui donne son signe à $\frac{dF}{d\rho}$.

Soit k_0 la plus petite valeur que puisse prendre F le long du cercle $\rho = \rho_0$, et soit $k < k_0$.

Il est clair que $F = k$ sera une courbe fermée, ou plutôt que, parmi les branches dont se compose cette courbe algébrique, il y en a une qui est fermée, qui enveloppe l'origine et qui est intérieure au cercle $\rho = \rho_0$. C'est cette branche que nous envisagerons à l'exclusion de toutes les autres.

Maintenant, pour qu'il y eût contact entre ce cycle et une de nos trajectoires, il faudrait que l'on eût

$$\Phi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0.$$

Or le polynôme Φ, par hypothèse, n'a pas de terme de degré inférieur à q, et ses termes de degré q se réduisent à

$$-C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Si ρ est inférieur à une certaine limite (et nous pourrons toujours supposer que ρ_0 est inférieur à cette limite), ce sont ces termes de degré q qui donnent leur signe à Φ, et, comme ils sont toujours de même signe, Φ ne peut pas s'annuler.

Il ne peut donc y avoir de contact entre nos deux courbes

Ainsi l'intérieur de la courbe $F = k_0$ est sillonné par une infinité de cycles sans contact s'enveloppant mutuellement et enveloppant l'origine.

Supposons C_0 négatif pour fixer les idées, on aura, à l'intérieur du cercle $\rho = \rho_0$,

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} > 0.$$

Donc, lorsque t tendra vers $+\infty$, le point mobile ira en s'éloignant de l'origine jusqu'à ce qu'il soit sorti de la courbe $F = k_0$, et, une fois sorti de cette courbe, il n'y pourra plus rentrer. Lorsque t tendra vers $-\infty$, le point mobile se rapprochera indéfiniment et asymptotiquement de l'origine en décrivant une infinité de spires autour de ce point. La trajectoire est donc une spirale.

En d'autres termes, *il y aura instabilité, et l'origine sera un foyer.*

Si C_0 était positif, il suffirait de changer le signe de t, et l'on retomberait sur les mêmes résultats.

Soient, par exemple,

$$\frac{dx}{dt} = y - \frac{\beta x^3}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{2\alpha x^2 y - \beta y^3}{2}.$$

Nous ferons $F_2 = x^2 + y^2$, $F_3 = 0$, et la troisième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_4}{dx} - x\frac{dF_4}{dy} = \beta x^4 - 2\alpha x^2 y^2 + \beta y^4 = H_4.$$

Nous avons vu qu'il est impossible, en général, de satisfaire à cette équation. Nous prendrons

$$F_4 = \frac{\alpha + \beta}{4}(y^2 - x^2)xy,$$

et il viendra, comme nous l'avons vu,

$$H_4 - y\frac{dF_4}{dx} + x\frac{dF_4}{dy} = \frac{3\beta - \alpha}{2}(x^2 + y^2)^2.$$

D'après ce que nous venons de voir, si $3\beta - \alpha$ n'est pas nul, les courbes

$$F_2 + F_4 = k$$

seront des cycles sans contact, pourvu que k soit suffisamment petit. Il y aura instabilité, et l'origine sera un foyer.

Supposons maintenant que $3\beta = \alpha$. La troisième équation (1) sera alors satisfaite. Nous prendrons $F_5 = 0$, et la cinquième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_6}{dx} - x\frac{dF_6}{dy} = H_6.$$

On trouve, d'ailleurs, en faisant $\beta = 1$, $\alpha = 3$,

$$H_6 = \tfrac{3}{2}x^5y - 9x^3y^3 + \tfrac{3}{2}y^5x,$$

et l'on voit qu'il est possible de satisfaire à la cinquième équation (1) en faisant

$$F_6 = \tfrac{5}{4}x^6 + 3x^4y^2 + \tfrac{3}{4}x^2y^4.$$

Nous prendrons ensuite $F_7 = 0$, et la septième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_8}{dx} - x\frac{dF_8}{dy} = H_8,$$

où

$$8H_8 = 30x^8 - 96x^6y^2 - 42x^4y^4 + 12x^2y^6$$

ou

$$\tfrac{4}{3}H_8 = 5x^8 - 16x^6y^2 - 7x^4y^4 + 2x^2y^6.$$

Posons $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$; développons ensuite H_8 suivant les sinus et cosinus des multiples de ω, et voyons si le terme tout connu

$$\tfrac{4}{3}C_0\rho^8$$

est nul. On trouve

$$\frac{4}{3}\frac{H_8}{\rho_8} = 12\cos^8\omega + 4\cos^6\omega - 13\cos^4\omega + 2\cos^2\omega;$$

d'où

$$\frac{4}{3}C_0 = \frac{12.35}{128} + \frac{4.5}{16} - \frac{13.6}{16} + \frac{2}{2} = \frac{84}{128}.$$

Ainsi il est impossible de satisfaire à la septième équation (1); l'origine est donc encore un foyer.

On doit conclure de là que, si le mouvement d'un point mobile est défini par les équations

$$\frac{dx}{dt} = y - \frac{\beta x^3}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{2\alpha x^2 y - \beta y^3}{2},$$

la trajectoire de ce point sera toujours instable, quels que soient α et β.

Ainsi l'on cherchera à résoudre successivement toutes les équations (1), et, dès qu'on se trouvera arrêté, on sera certain que la trajectoire est instable.

2° Mais il peut arriver aussi qu'on ne soit jamais arrêté, ce qui exige une infinité de conditions. Ces conditions sont évidemment nécessaires, pour que la trajectoire soit stable, ou pour que l'origine soit un centre. Sont-elles suffisantes? C'est ce que nous allons examiner.

Formons successivement, à l'aide des équations (1), les polynômes F_2, F_3, ..., F_q, et considérons la série infinie

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q + \ldots.$$

Si elle est convergente, il n'y a pas de difficulté, car elle satisfera à l'équation

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y = 0.$$

Les courbes $F = k$ seront donc les trajectoires du point mobile, et ce seront des courbes fermées si k est suffisamment petit.

Il reste à examiner si la série F converge.

Posons

$$X = R\cos\omega - \rho\Omega\sin\omega, \quad Y = R\sin\omega + \rho\Omega\cos\omega.$$

L'équation précédente deviendra

$$\frac{dF}{d\rho}R + \frac{dF}{d\omega}\Omega = 0.$$

Nous pourrons développer la fonction $-\frac{R}{\Omega}$ suivant les puissances croissantes de ρ, le développement commençant par un terme en ρ^2; nous écrirons

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots,$$

θ_2, θ_3, ... étant des fonctions de ω. L'équation précédente deviendra

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{d\rho}(\rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots),$$

et, si l'on pose

$$F_q = \rho^q z_q, \quad z'_q = \frac{dz_q}{d\omega},$$

les z_q étant des fonctions de ω.

Alors on déterminera successivement les z_q à l'aide des équations suivantes qui remplaceront les équations (1):

$$(1\,bis)\quad \begin{cases} z_2 = 1, \\ z'_3 = 2z_2\theta_2, \\ z'_4 = 3z_3\theta_2 + 2z_2\theta_3, \\ z'_5 = 4z_4\theta_2 + 3z_3\theta_3 + 2z_2\theta_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_q = (q-1)z_{q-1}\theta_2 + (q-2)z_{q-2}\theta_3 + \ldots + 3z_3\theta_{q-2} + 2z_2\theta_{q-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

S'il est possible de satisfaire aux équations (1) avec des polynômes entiers en x et en y, il sera possible de satisfaire aux équations (1 *bis*) avec des fonctions purement trigonométriques de ω (c'est-à-dire avec des polynômes en $\cos\omega$ et $\sin\omega$).

Si, au contraire, il n'est pas possible de satisfaire aux équations (1) (c'est-à-dire si les quantités C_0 ne sont pas toutes nulles), on pourra

néanmoins résoudre les équations (1 *bis*) et calculer successivement les fonctions z'_q; mais ces fonctions, au lieu de ne contenir que des termes trigonométriques, contiendront des termes où ω entrera, en dehors des signes sinus et cosinus, soit à la première puissance, soit à une puissance supérieure.

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie des termes ainsi introduits avec les termes que les astronomes appellent *séculaires*. Il y a, cependant, une différence essentielle qu'il importe de remarquer. Quand, dans les méthodes habituelles de la Mécanique céleste, on rencontre un terme séculaire, il n'est pas permis, pour cela, de conclure à l'instabilité de l'orbite; car il peut se faire, ou bien que la série soit divergente, ou bien que le terme ainsi obtenu ne soit que le premier terme d'un développement dont la somme reste toujours finie. C'est ainsi que $\alpha\omega$ peut être le premier terme du développement

$$\sin\alpha\omega = \alpha\omega - \frac{\alpha^3\omega^3}{6} + \frac{\alpha^5\omega^5}{120} - \ldots$$

Il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe et avec la méthode que je viens d'exposer. Si, dans la suite des calculs, on rencontre un terme séculaire, on pourra conclure immédiatement à l'instabilité; il n'est pas même nécessaire, pour cela, que la série

$$F = \rho^2 z_2 + \rho^3 z_3 + \ldots$$

soit convergente.

Nous pouvons poser la question de la convergence même dans le cas où les fonctions z_q contiennent des termes séculaires; car, bien que cette question présente alors beaucoup moins d'intérêt, il est avantageux, pour arriver plus facilement à la solution, de se débarrasser des restrictions inutiles.

Commençons par dire quelques mots des trois cas simples suivants :

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2\frac{d\varphi}{d\omega}, \quad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2 + \rho^3)\frac{d\varphi}{d\omega}, \quad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2 + \rho^4)\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

On trouve alors, pour les intégrales générales des équations du mouve-

ment, en appelant k une constante d'intégration,

$$\frac{1}{\rho} - \varphi = k, \quad \frac{1}{\rho} + \mathrm{L}\,\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = k, \quad \frac{1}{\rho} + \operatorname{arc\,tang}\rho - \varphi = k.$$

Cherchons à former F.

Dans le premier cas, on trouve aisément

$$\mathrm{F} = \frac{\rho^2}{(1-\varphi\rho)^2}.$$

Dans le troisième cas, si nous posons

$$\frac{\rho}{1+\rho \operatorname{arc\,tang}\rho} = \zeta,$$

le premier membre de cette égalité sera une fonction holomorphe de ρ (pour $\rho = 0$) qui s'annule avec ρ, mais dont la dérivée ne s'annule pas avec ρ. On en déduira, d'après un théorème connu,

$$\rho = \psi(\zeta),$$

ψ étant une fonction holomorphe de ζ. On aura alors

$$\mathrm{F} = \left[\psi\left(\frac{\rho}{1+\rho \operatorname{arc\,tang}\rho - \rho\varphi}\right)\right]^2.$$

Cette fonction, comme dans le premier cas, est holomorphe en ρ et φ, pourvu que ces variables soient suffisamment petites.

Dans le deuxieme cas, on ne peut appliquer ce procédé, parce que la fonction

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\rho} + \mathrm{L}\,\dfrac{\rho}{\rho+1}}$$

n'est pas holomorphe. Posons alors

$$\mathrm{F} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1\varphi + \frac{\mathrm{H}_2\varphi^2}{1.2} + \cdots + \frac{\mathrm{H}_n\varphi^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

en développant F non plus suivant les puissances de ρ, mais suivant

celles de φ. On déterminera ensuite les fonctions H successivement à l'aide des équations suivantes :

$$(1\,ter)\quad \begin{cases} H_0 = \rho^2, \\ H_1 = (\rho^2+\rho^3)\dfrac{dH_0}{d\rho}, \\ H_2 = (\rho^2+\rho^3)\dfrac{dH_1}{d\rho}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_n = (\rho^2+\rho^3)\dfrac{dH_{n-1}}{d\rho}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Les fonctions H ainsi définies sont des polynômes entiers en ρ, et il est aisé de voir que tous les coefficients sont positifs, que le degré de H_n est $2(n+1)$, et que ce polynôme H_n ne contient pas de terme de degré plus petit que $n+2$.

Soient S_n la somme des coefficients de H_n et S'_n celle des coefficients de sa dérivée $\frac{dH_n}{d\rho}$; H_n étant de degré $2(n+1)$; on aura

$$S'_n < 2S_n(n+1).$$

D'ailleurs, les formules (1 *ter*) nous donnent

$$S_{n+1} = 2S'_n;$$

d'où

$$S_{n+1} < 4S_n(n+1)$$

et

$$S_{n+1} < 4^{n+1}(n+1)!$$

Supposons ρ positif et plus petit que 1, et envisageons le terme général de la série qui définit F; on aura

$$\left|\frac{H_n\varphi^n}{n!}\right| < (4\rho\varphi)^n.$$

Si donc $\rho\varphi$ est positif et plus petit que $\frac{1}{4}$, la série est convergente et, comme tous ses termes sont positifs, absolument convergente.

La conclusion, c'est que F est une fonction holomorphe de ρ et de φ, pourvu que

$$|\rho| < 1, \quad |\rho\varphi| < \frac{1}{4}.$$

Il était aisé de prévoir ce résultat. Posons, en effet,

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} + \mathrm{L}\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = \frac{1}{\zeta} + \mathrm{L}\frac{\zeta}{\zeta+1}.$$

Je dis que ζ est une fonction holomorphe de ρ et de φ dans le voisinage du point $\rho = \varphi = 0$. Pour cela, il faut démontrer deux choses :

1° Que ζ tend vers zéro, toutes les fois que ρ et φ tendent simultanément vers zéro.

En effet, si ρ et φ tendent vers zéro, les deux membres de l'équation (5) croîtront indéfiniment. Or, pour que

$$\frac{1}{\zeta} + \mathrm{L}\frac{\zeta}{\zeta+1}$$

croisse indéfiniment, il faut que ζ tende vers zéro ou vers -1. Mais, si la valeur initiale de ζ est suffisamment voisine de zéro, il faudra que ζ tende vers zéro et non pas vers -1. Il suffira de le vérifier, ce qui est facile, lorsque, φ et l'argument de ρ restant constants, le module de ρ tend vers zéro. Cela sera suffisant, parce que nous allons voir un peu plus loin que ζ est une fonction *uniforme* de ρ et de φ.

2° Il faut démontrer ensuite que ζ revient à la même valeur quand ρ décrit dans son plan, et ω dans le sien, un contour suffisamment petit enveloppant le point zéro. Or, dans ces conditions, le premier et, par conséquent, le second membre de l'équation (5) augmenteront d'un multiple de $2i\pi$, ce qui fera décrire au point ζ un contour fermé enveloppant le point zéro.

Donc ζ, et, par conséquent,

$$\mathrm{F} = \zeta^2$$

sont une fonction holomorphe de ρ et de φ si ces variables sont assez petites.

Supposons maintenant

$$-\frac{\mathrm{R}}{\Omega} = \mathrm{P}(\rho) = \rho^2 + \beta\rho^3 + \gamma\rho^4 + \ldots,$$

$P(\rho)$ étant une série ordonnée suivant les puissances de ρ et convergente, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

L'intégrale générale des équations différentielles sera

$$\omega + \int \frac{d\rho}{P(\rho)} = \text{const.}$$

On trouvera, d'ailleurs,

$$\int \frac{d\rho}{P(\rho)} = -\frac{1}{\rho} - \beta L\rho - Q(\rho),$$

$Q(\rho)$ étant une fonction de ρ holomorphe pour $\rho = 0$.

Posons maintenant

$$(5\,bis) \qquad \frac{1}{\rho} + \beta L\rho + Q(\rho) - \omega = \frac{1}{\zeta} + \beta L\zeta + Q(\zeta).$$

Nous considérerons, parmi les fonctions ζ qui satisfont à cette équation, celle qui se réduit à ρ pour $\omega = 0$. Je dis que ce sera une fonction holomorphe de ρ et de ω, si ces variables sont suffisamment petites.

Pour cela, il faut faire voir que, si ρ et ω sont assez petits, ζ est une fonction uniforme de ρ et de ω qui tend vers zéro quand ces variables tendent simultanément vers zéro. Le raisonnement serait absolument le même que dans le cas précédent. Il en résulte que

$$F = \zeta^2$$

est une fonction holomorphe de ρ et de ω.

Il est, d'ailleurs, aisé de trouver les coefficients du développement de F suivant les puissances de ρ et de ω. Écrivons, en effet,

$$F = H_0 + H_1\omega + \frac{H_2\omega^2}{2} + \ldots + \frac{H_n\omega^n}{n!} \cdots,$$

$$P(\rho) = \Sigma a_p \rho^p,$$

$$H_n = \Sigma h_{np} \rho^p.$$

Nous supposerons, ce qui est utile pour notre objet, que tous les a_p sont positifs, et nous pourrons trouver deux nombres μ et α, tels que

$$a_p < \mu\alpha^p.$$

Les H nous seront donnés par les équations

$$H_0 = \rho^2,$$
$$H_1 = P(\rho)\frac{dH_0}{d\rho},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{n+1} = P(\rho)\frac{dH_n}{d\rho}.$$

Nous adopterons la notation suivante : l'inégalité

$$f(\rho) \lll \varphi(\rho),$$

avec un double signe d'inégalité, signifiera (lorsque les coefficients des fonctions f et φ développées suivant les puissances de ρ sont positifs, ce que nous supposerons) que chaque coefficient de f est plus petit que le coefficient correspondant de φ. Nous pourrons écrire alors

$$P(\rho) \lll \frac{\mu}{1 - a\rho}.$$

Je dis qu'on pourra toujours trouver un nombre M_n, tel que

$$H_n(\rho) \lll \frac{M_n n!}{(1 - a\rho)^{2n+1}}.$$

Supposons, en effet, que cela soit vrai pour H_n, je dis que cela sera vrai pour H_{n+1}. Il viendra, dans cette hypothèse,

$$\frac{dH_n}{d\rho} \lll \frac{M_n a n!(2n+1)}{(1 - a\rho)^{2n+2}} \lll \frac{2aM_n(n+1)!}{(1 - a\rho)^{2n+2}};$$

d'où

$$H_{n+1} = P\frac{dH_n}{d\rho} \lll \frac{2a\mu M_n(n+1)!}{(1 - a\rho)^{2n+3}};$$

d'où

$$M_{n+1} = 2a\mu M_n, \quad M_n = M_0(2a\mu)^n.$$

Il vient alors

$$F = \sum \frac{H_n \omega^n}{n!} \lll \sum \frac{M_0(2a\mu\omega)^n}{(1 - a\rho)^{2n+1}} = \frac{M_0}{1 - a\rho}\,\frac{1}{1 - \dfrac{2a\mu\omega}{(1 - a\rho)^2}}.$$

On conclut de cette inégalité que la série F converge, pourvu que, par exemple,

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \quad |\omega| < \frac{1}{8a\mu}.$$

Mais il est aisé de voir que le développement de H_0 commence par un terme en ρ^2, celui de H_1 par un terme en ρ^3, ..., celui de H_n par un terme en ρ^{n+2}. Donc la fonction F est une fonction holomorphe, non seulement de ρ et de ω, mais de ρ et de $\rho\omega$. La série F convergera donc, pourvu que

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \quad |\rho\omega| < \frac{1}{16a^2\mu}.$$

Donc cette série sera convergente pour toutes les valeurs de ω comprises entre zéro et 2π, pourvu que

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \quad |\rho| < \frac{1}{32a^2\mu\pi}.$$

Voici comment ce qui précède se rattache aux principes exposés par MM. Briot et Bouquet dans le XXXVIe Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*.

Considérons ω comme une constante; nous aurons, entre ζ et ρ, l'équation différentielle

$$\frac{d\zeta}{P(\zeta)} = \frac{d\rho}{P(\rho)}$$

ou

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\,\frac{1+\beta\zeta+\ldots}{1+\beta\rho+\ldots} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}[1+\beta(\zeta-\rho)+\psi],$$

ψ représentant un ensemble de termes de degré au moins égal à 2 en ζ et en ρ. Posons

$$\zeta = \rho(1+v).$$

Il viendra

$$\rho\frac{dv}{d\rho} = v + v^2 + \beta(1+v)^2\rho v + (1+v)^2\psi,$$

la fonction ψ contenant ρ^2 en facteur.

C'est là un type d'équations qui, d'après un théorème de MM. Briot

et Bouquet, admet une infinité d'intégrales holomorphes, s'annulant avec ρ.

Donc ζ est fonction holomorphe de ρ. C. Q. F. D.

Passons maintenant au cas général.

Il importe d'abord de rappeler et de préciser le sens de la notation $<$ déjà employée plus haut. Quand j'écrirai dans ce qui va suivre :

$$f(\rho, \omega) < \varphi(\rho, \omega),$$

je regarderai les deux fonctions f et φ comme développées suivant les puissances croissantes de ρ. Les coefficients des deux développements seront des fonctions de ω que je regarderai momentanément comme une constante et que je supposerai réelle et comprise entre zéro et 2π.

L'inégalité signifiera alors que, pour toutes les valeurs réelles de ω comprises entre zéro et 2π, tous les coefficients du développement de φ sont positifs et plus grands en valeur absolue que les coefficients correspondants du développement de f.

Soient

$$R = \rho^2 + R_3\rho^3 + \ldots + R_p\rho^p,$$
$$\Omega = 1 + \Omega_1\rho + \Omega_2\rho^2 + \ldots + \Omega_q\rho^q.$$

Les coefficients R_i et Ω_i des deux polynômes R et Ω seront des fonctions trigonométriques de ω. Supposons que toutes ces fonctions trigonométriques restent constamment inferieures en valeur absolue à une certaine quantité positive L. Il viendra

$$(6) \qquad -\frac{R}{\Omega} < \frac{(\rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^p)L}{1 - (\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^q)L} < \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}.$$

La fonction $\frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}$ qui ne dépend que de ρ est développable suivant les puissances de ρ, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

Il en résulte qu'il existe une série F_1 ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ et de ω, convergente pour toutes les valeurs réelles de ω comprises entre zéro et 2π, pourvu que ρ soit suffisamment petit, et satisfaisant à l'égalité

$$\frac{dF_1}{d\omega} = \frac{dF_1}{d\rho} \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}.$$

De plus F_1 se réduit à ρ^2 pour $\omega = 0$. Posons, comme plus haut,

$$F = z_2\rho^2 + z_3\rho^3 + \ldots + z_q\rho^q + \ldots,$$
$$F_1 = u_2\rho^2 + u_3\rho^3 + \ldots + u_q\rho^q + \ldots.$$

Les fonctions z_q seront définies par les équations (1 *bis*) et les fonctions u_q par les équations analogues

$$u_2 = 1,$$
(7) $$u'_q = (q-1)u_{q-1}\theta'_2 + (q-2)u_{q-2}\theta'_3 + \ldots + 2u_2\theta'_{q-1},$$

où

$$\theta'_{q+2} = (L+1)^q L.$$

Cela posé, je dis qu'on aura constamment, ω étant réel et plus petit que 2π,

(8) $$|z_q| < u_q.$$

Pour cela, je vais supposer que l'inégalité (8) a lieu pour z_2, z_3, …, z_{q-1}, et démontrer qu'elle a encore lieu pour z_q.

En effet, s'il en est ainsi, on a, en comparant les relations (1 *bis*), (6) et (7),

(9) $$|z'_q| < u'_q.$$

La fonction z_q n'est pas entièrement déterminée par les équations (1 *bis*); ces équations ne nous donnent en effet que la dérivée de z_q en fonction de z_2, z_3, …, z_{q-1}. Il en résulte que z_q n'est connue qu'à une constante d'intégration près. Nous disposerons de cette constante de telle façon que z_q s'annule avec ω.

Dans ces conditions, l'inégalité (9) entraîne l'inégalité

(8) $$|z_q| < u_q,$$ C. Q. F. D.

Donc on a

$$F \leqq F_1,$$

et, comme pour les petites valeurs de ρ, F_1 est convergent quand ω varie de zéro à 2π, il en sera de même de F.

Mais, d'après la façon dont nous avons déterminé les z_q, ce sont des fonctions trigonométriques de ω (dans le cas où tous les C_0 sont nuls). Si donc F converge pour les valeurs de ω comprises entre zéro et 2π, cette série devra converger pour toutes les valeurs réelles de ω.

Il est à remarquer que, si, partant de la série F telle que nous venons de la définir, on repasse des coordonnées polaires ρ et ω aux coordonnées rectilignes x et y, F ne sera plus une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y. Cela tient à la façon dont nous avons disposé des constantes d'intégration, de façon que z_q s'annule avec ω.

Il pourra se faire alors, par exemple, que l'on ait

$$F = \rho^2 + \rho^3(1 - \cos\omega) + \ldots,$$

ce qui donne

$$F = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - x(x^2 + y^2) + \ldots.$$

En effet, si l'on tient à ce que F soit une fonction holomorphe de x et de y, on peut disposer de la constante d'intégration (que nous avons appelée plus haut A_0) lorsque q est pair, mais on n'en peut plus disposer quand q est impair. Il ne sera donc pas possible en général de s'arranger pour que z_q s'annule avec ω

Cela n'a d'ailleurs que peu d'importance au point de vue qui nous occupe, mais il est aisé de tourner la difficulté. On a

$$\frac{dF}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{dF}{d\rho}.$$

Soit F_2 ce que devient F quand on y change ρ en $-\rho$, et ω en $\omega + \pi$. On aura encore, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{dF_2}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{dF_2}{d\rho},$$

car $-\frac{R}{\Omega}$ change de signe quand on y change ρ et $-\rho$, et ω en $\omega + \pi$.

On aura donc encore

$$\frac{d(F+F_2)}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{d(F+F_2)}{d\rho},$$

et la série $F + F_2$ sera convergente pour toutes les valeurs réelles de ω, pourvu que ρ soit suffisamment petit. Si d'ailleurs on repasse aux coordonnées rectilignes x et y, $F + F_2$ sera une fonction holomorphe de x et de y. On voit donc qu'il existe toujours, si tous les C_0 sont nuls, une série F convergente, ordonnée suivant les puissances de x et de y et satisfaisant à l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0.$$

En résumé, *pour que l'origine soit un centre, c'est-à-dire pour que la trajectoire du point mobile soit stable, il faut et il suffit que toutes les quantités que nous avons appelées* C_0 *soient nulles à la fois.*

Toutefois, il sera souvent difficile de reconnaître si ces conditions, en nombre infini, sont remplies à la fois. Il y a donc intérêt à signaler des cas où l'on est certain d'avance que tous les C_0 sont nuls.

Je ne signalerai que le plus simple d'entre eux.

Supposons que, quand on change y en $-y$, sans changer x, X se change en $-X$ et que Y ne change pas. Je dis que les trajectoires du point mobile seront des courbes fermées symétriques par rapport à l'axe des x.

En effet, partons, pour $t = 0$, d'un point initial situé sur l'axe des x. La vitesse initiale du point mobile sera, d'après les hypothèses faites, perpendiculaire à cet axe. Si l'on change t en $-t$, y en $-y$, x en $-x$, les équations du mouvement et ses conditions initiales ne changent pas. Donc le point mobile occupera aux temps t en $-t$ deux points du plan symétrique, par rapport à l'axe des x. D'après la forme des équations, si le point de départ de notre mobile est suffisamment voisin de l'origine, il arrivera à une époque t_0 où sa trajectoire viendra recouper l'axe des x. Ainsi, aux deux époques t_0 et $-t_0$, le point mobile occupera un même point de l'axe des x. Sa trajectoire sera donc une courbe fermée, et il résulte de ce qui précède qu'elle doit

être symétrique par rapport à l'axe des x. Donc on est certain d'avance que tous les C_0 sont nuls.

On rencontre un exemple du cas que nous venons de signaler dans un problème astronomique sur lequel M. Tisserand a bien voulu appeler mon attention. Delaunay a rencontré dans sa théorie de la Lune les équations suivantes :

$$\frac{de}{dt} = M(1 + M_1 e^2 + M_2 e^4)\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = N(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) + \frac{M}{e}(1 + P_1 e^2 + P_2 e^4)\cos\theta.$$

On suppose que, pour $t = 0$, e est très petit et que, le coefficient M étant de l'ordre du carré de cette petite quantité, les autres coefficients sont finis (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, p. 107).

Delaunay donne les expressions suivantes

$$e\cos\theta = \Sigma A_i \cos i(\alpha t + c),$$
$$e\sin\theta = \Sigma B_i \sin i(\alpha t + c);$$

mais il ne traite pas la question de la convergence et de la possibilité du développement.

Les équations sont de même forme que celles que nous étudions. Posons, en effet,

$$e\cos\theta = x, \quad e\sin\theta = y,$$

il viendra

$$\frac{dx}{dt} = Mxy(M_1 - P_1 + M_2 e^2 - P_2 e^2)$$
$$- Ny(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) = X,$$

$$\frac{dy}{dt} = M + My^2(M_1 + M_2 e^2)$$
$$+ Mx^2(P_1 + P_2 e^2) + Nx(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) = Y,$$

où

$$e^2 = x^2 + y^2;$$

X et Y s'annulent, pour $y = 0$,

$$(10) \quad M(1 + P_1 x^2 + P_2 x^4) + Nx(1 + N_1 x^2 + N_2 x^4 + N_3 x^6) = 0.$$

En vertu des hypothèses faites sur les coefficients, l'équation (10) est satisfaite pour $x = x_1$, x_1 étant une quantité très petite de l'ordre de M.

Le point $x = x_1$, $y = 0$ est un centre; car X change de signe et Y ne change pas quand on change y en $-y$. On est donc certain d'avance que toutes les quantités que nous avons appelées C_0 sont nulles à la fois.

Il en résulte que x et y sont des fonctions périodiques du temps t, qui peuvent être représentées par des séries de la forme obtenue par Delaunay.

Si l'on a reconnu d'une manière ou d'une autre que toutes les quantités C_0 sont nulles, on est certain qu'il y a autour du centre une certaine région du plan R qui est sillonnée par des courbes fermées ou cycles enveloppant le centre et qui sont les trajectoires du point mobile dans la région considérée. Au delà de la région R, les trajectoires seront en général des spirales. Cette région sera limitée par un certain cycle frontière qui sera la dernière trajectoire fermée. Je dis que ce cycle frontière doit passer par un point singulier.

En effet nous pourrons toujours tracer un arc sans contact venant couper ce cycle frontière, ainsi que les trajectoires fermées qui en sont très voisines et se prolongeant au delà de ce cycle frontière et en dehors de la région R. Nous définirons la position d'un point sur cet arc à l'aide d'un paramètre t qui sera, par exemple, nul sur le cycle frontière, négatif à l'intérieur de la région R et positif à l'extérieur de cette région.

Reportons-nous maintenant au Chapitre V (IIe Partie) et à ce que nous avons appelé la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0).$$

Pour les valeurs négatives de t_0, on est à l'intérieur de R; les trajectoires sont fermées et l'on a

$$\varphi_1(t_0) = t_0.$$

Au contraire, pour les valeurs positives de t_0, on est hors de R; les

trajectoires ne sont plus fermées, et l'on a

$$\varphi_1(t_0) \gtrless t_0.$$

Il est donc impossible que la fonction φ_1 soit holomorphe pour $t_0 = 0$. Donc, en vertu du théorème XIII (p. 255), le cycle frontière doit aller passer par un point singulier.

CHAPITRE XII.

ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR.

Nous allons étudier maintenant les équations différentielles du premier ordre et de degré supérieur, c'est-à-dire les équations de la forme

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

F étant un polynôme entier en x, y et $\frac{dy}{dx}$.

Voici le mode de représentation géométrique que nous adopterons. Nous pourrions d'abord envisager la surface

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

et exprimer les équations du mouvement du point mobile sur cette surface, de la façon suivante

$$(2\ bis) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dz}, \quad \frac{dy}{dt} = -z\frac{dF}{dz}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dx} + z\frac{dF}{dy},$$

de telle sorte que $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont égaux à des polynômes entiers en x, y, z.

C'est là le mode de représentation le plus simple, toutes les fois que la surface $F(x, y, z)$ n'a pas de nappes infinies ou de singularités gênantes Mais il peut être avantageux, dans certains cas, d'employer un mode de représentation plus général.

Posons

$$(3)\qquad \xi = \varphi_1(x, y, z), \quad \eta = \varphi_2(x, y, z), \quad \zeta = \varphi_3(x, y, z),$$

les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 étant rationnelles en x, y, z.

Sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté, on déduira des équations (2) et (3) les équations

$$(4)\qquad F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

et

$$(5)\qquad x = \theta_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \theta_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \theta_3(\xi, \eta, \zeta),$$

F_1 étant un polynôme entier et θ_1, θ_2, θ_3 des fonctions rationnelles. Les deux surfaces (2) et (4) se correspondront alors point par point par une transformation birationnelle, et l'on aura

$$\frac{d\xi}{\psi_1(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\eta}{\psi_2(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\zeta}{\psi_3(\xi, \eta, \zeta)},$$

les fonctions ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant rationnelles.

On pourra disposer de ce qu'il y a d'indéterminé dans la transformation birationnelle (3) pour que la surface (4) n'ait pas de nappes infinies et aussi pour atteindre différents autres buts, par exemple pour faire disparaître des singularités gênantes. Voici donc comment nous nous poserons le problème des équations différentielles de degré supérieur.

On donne une surface S ayant pour équation

$$F(x, y, z) = 0$$

et n'ayant pas de nappes infinies; et l'on demande d'étudier le mouvement d'un point mobile sur cette surface, les équations du mouvement étant

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

où X, Y et Z sont des polynômes entiers en x, y, z avec la condition

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = MF.$$

Étudions d'abord les trajectoires du point mobile dans le voisinage d'un point M de la surface. Nous distinguerons le cas où le point M est un point ordinaire de la surface S (tout en pouvant être un point singulier pour les équations différentielles) et le cas où le point M est un point singulier de la surface S.

Dans le premier cas, on pourra exprimer, dans le voisinage du point M, x, y et z par des fonctions holomorphes de deux paramètres u et v et de telle façon que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

ne soient pas nuls à la fois.

On pourra écrire alors

$$\frac{du}{dt} = U, \quad \frac{dv}{dt} = V,$$

U et V étant des fonctions holomorphes en u et en v. On est alors ramené à l'étude des courbes planes définies par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré; car, dans le voisinage du point considéré, les fonctions U et V ont tous les caractères des polynômes entiers.

Si le point considéré est un point ordinaire, il passe par ce point une trajectoire et une seule.

Si c'est un point singulier de l'équation différentielle, c'est-à-dire si $U = V = 0$, ce peut être un *col*, un *foyer*, un *nœud* ou un *centre*, présentant les mêmes propriétés que les points de même nom définis dans la Ire Partie.

Dans le cas des équations (2) et (2 *bis*) les points singuliers sont donnés par les équations

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx} + z\frac{dF}{dy} = 0.$$

Supposons maintenant que le point envisagé soit un point singulier pour la surface S elle-même, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = 0.$$

Ce cas se ramène au précédent. Supposons d'abord, par exemple, que la surface S présente une courbe double, que le point considéré soit un point de cette courbe double, et que les deux plans tangents en ce point soient distincts. Alors on pourra exprimer, dans le voisinage du point envisagé, x, y et z en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v, et cela de deux manières, l'une des manières se rapportant à l'une des nappes de la surface qui passent par la courbe double, et la seconde manière à l'autre nappe. On retombe donc sur le cas précédent.

De même, supposons que le point considéré, que nous pourrons prendre pour origine des coordonnées, soit un point conique du second ordre. Soit, par exemple,

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_n,$$

F_i étant un polynôme homogène de degré i en x, y, z. Considérons la portion de cette surface qui est voisine de l'origine, c'est-à-dire du point conique. Je dis que nous pourrons, par une transformation birationnelle, transformer cette portion de surface en une autre qui n'aura pas de point singulier. Il suffit pour cela de poser

$$\xi = \frac{x}{z}(1 - z), \quad \eta = \frac{y}{z}(1 - z), \quad \zeta = 1 - z,$$

d'où

$$x = \frac{\xi}{\zeta}(1 - \zeta), \quad y = \frac{\eta}{\zeta}(1 - \zeta), \quad z = 1 - \zeta.$$

Cette transformation birationnelle est donc réciproque et elle a pour effet de transformer la surface F dans la suivante :

$$z^{n-2}F_2 + z^{n-3}(1 - z)F_3 + z^{n-4}(1 - z)^2 F_4 + \ldots + (1 - z)^n F_n = 0.$$

Cette surface transformée est coupée par le plan $z = 1$ suivant la conique

$$F_2(x, y, 1) = 0,$$

et elle ne présente pas de point singulier le long de cette conique. D'ailleurs, la portion de la surface S, voisine du point conique, devient, après la transformation, la portion de la surface transformée voisine de cette conique, c'est-à-dire une portion de surface dépourvue de point singulier.

On est donc encore ramené au cas précédent. D'ailleurs, nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la surface S ne présente pas de pareils points singuliers.

D'après les hypothèses faites, la surface S qui est algébrique n'a pas de nappes infinies; elle se compose donc d'un certain nombre de nappes fermées $S_1, S_2, \ldots, S_p$ séparées les unes des autres. Au point de vue qui nous occupe, il nous suffira d'étudier séparément la forme des trajectoires sur une de ces nappes, sur la nappe S_1 par exemple.

Il est une notion qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui va suivre, c'est le genre de la nappe S_1 au point de vue de la géométrie de situation.

Voici la définition de ce genre. Si l'on peut tracer, sur la surface fermée S_1, p cycles fermés n'ayant aucun point commun, sans partager la surface en deux régions séparées, et si l'on n'en peut tracer davantage, on dira que la surface S_1 est de genre p (ou ce qui revient au même qu'elle est $2p + 1$ fois connexe). Ainsi la sphère est de genre 0, parce qu'on ne peut y tracer de cycle fermé sans partager sa surface en deux régions. Le tore est de genre 1, parce qu'un cercle méridien ou un cercle parallèle ne le divise pas en deux régions; et, si l'on a tracé sur la surface un cercle méridien, par exemple, on ne peut plus y tracer un nouveau cycle fermé, *ne rencontrant pas le premier*, sans partager le tore en deux régions.

Terminons ce Chapitre en étendant au cas qui nous occupe un théorème important de la première Partie.

Nous conserverons la convention faite au commencement de la deuxième Partie, c'est-à-dire que nous supposerons que toute trajectoire qui va passer par un nœud est arrêtée à ce nœud, et que toute

trajectoire qui va passer par un col est continuée soit à droite, soit à gauche, par l'une des branches de courbe qui vont passer par ce col.

Cela posé, il est clair que les trajectoires peuvent se partager en quatre catégories :

1° Les cycles ou courbes fermées;

2° Les trajectoires qui sont arrêtées à un nœud;

3° Les trajectoires qui se terminent en tournant indéfiniment autour d'un foyer dont elles se rapprochent asymptotiquement;

4° Les trajectoires que l'on peut prolonger indéfiniment sans jamais revenir au point de départ, sans jamais rencontrer un nœud ou se rapprocher asymptotiquement d'un foyer.

Il est clair que la longueur de ces dernières est infinie, soit qu'on compte cette longueur d'arc sur la surface S_1 elle-même, soit qu'on la compte sur la projection de la courbe sur un plan quelconque.

Considérons maintenant une trajectoire qui ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points. Il est évident qu'elle ne pourra appartenir à la troisième catégorie, car tout arc algébrique passant par un foyer rencontre en une infinité de points toute trajectoire qui tourne indéfiniment autour de ce foyer. Je dis qu'elle ne pourra pas non plus appartenir à la quatrième catégorie. Pour cela, je vais faire voir que, en supposant qu'une trajectoire de cette catégorie ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points, on trouverait que la projection de cette trajectoire sur un certain plan devrait avoir une longueur finie, ce qui est contraire à ce que nous venons de voir.

En effet, considérons la portion de la trajectoire décrite par le point mobile depuis une certaine époque $t = t_0$ que nous déterminerons davantage plus loin, jusqu'à $t = +\infty$.

Nous partagerons la surface S_1 par un certain nombre de cycles algébriques en un certain nombre de régions, telles que chacune d'elles ne puisse être rencontrée qu'en un seul point par une parallèle à l'axe des z. Ces cycles algébriques ne seront rencontrés par la trajectoire qu'en un nombre fini de points. Donc nous pourrons prendre t_0 assez grand pour que, à partir de l'époque t_0, le point mobile ne rencontre plus aucun de ces cycles et reste, par conséquent, à l'intérieur d'une des régions que nous venons de définir.

Il arrivera alors que, à partir de l'époque t_0, la projection du point mobile sur le plan des xy restera constamment à l'intérieur d'une certaine région finie R de ce plan.

Considérons sur la surface S_1 le lieu des points, tels que la projection sur le plan des xy de la trajectoire qui passe par ce point présente un point d'inflexion. Ce lieu sera algébrique et, par conséquent, ne pourra être rencontré qu'en un nombre fini de points par la trajectoire que nous considérons. Nous pouvons donc prendre t_0 assez grand pour que, à partir de cette époque t_0, la projection de cette trajectoire sur le plan des xy ne présente plus de point d'inflexion et soit, par conséquent, une courbe convexe.

Le lieu des points de la surface S_1 où l'on a $\frac{dx}{dt} = 0$, et celui des points où l'on a $\frac{dy}{dt} = 0$, sont encore algébriques. On peut en conclure, en raisonnant comme nous venons de le faire, que l'on peut prendre t_0 assez grand pour que, à partir de cette époque, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ restent toujours de même signe, positifs par exemple.

Soient maintenant M_0 la projection du point mobile au temps t_0, M_1 la projection de ce point au temps t_1 ($t_1 > t_0$). Par le point M_0 je mène une parallèle à l'axe des x; par le point M_1 je mène une parallèle à l'axe des y rencontrant la première en P.

Soit R′ un rectangle dont les côtés soient parallèles aux deux axes et qui soit tel que la région R définie plus haut y soit située tout entière. Le triangle curviligne M_0M_1P formé par l'arc de trajectoire M_0M_1 et les deux droites M_0P, M_1P sera *convexe* et situé tout entier à l'intérieur de R′. Son périmètre sera donc plus petit que celui de R′.

Donc l'arc M_0M_1 est toujours plus petit que le périmètre de R′, et cela quel que soit le point M_1. Donc la longueur de la projection de notre trajectoire serait finie, ce qui est absurde et nous oblige à rejeter l'hypothèse que la trajectoire soit de la quatrième catégorie.

D'où la conclusion suivante :

Toute trajectoire qui ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points est un cycle fermé ou va aboutir à un nœud, où l'on doit l'arrêter.

CHAPITRE XIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Reprenons la nappe S_1 de genre p, et supposons que cette nappe ne présente ni point conique, ni courbe multiple.

Soient C le nombre des cols situés sur cette nappe, N le nombre des nœuds, F celui des foyers; je dis qu'on aura la relation

$$N + F - C = 2 - 2p.$$

Traçons sur la surface S_1 un cycle quelconque. Ce cycle sera touché en certains de ses points par diverses trajectoires, mais les unes le toucheront extérieurement, les autres intérieurement. Soient E le nombre des contacts extérieurs, I celui des contacts intérieurs; le nombre

$$J = \frac{E - I - 2}{2}$$

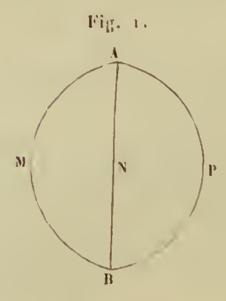
s'appellera l'*indice* du cycle. Si le cycle présente un point anguleux, il pourra arriver que la trajectoire qui passe par ce point traverse ce cycle en passant de l'extérieur à l'intérieur, auquel cas ce point ne doit pas compter pour un contact. Il pourra arriver aussi que cette trajectoire ne passe pas de l'extérieur du cycle à l'intérieur, mais reste constamment à l'extérieur si le point anguleux est saillant, ou constamment à l'intérieur si le point anguleux est rentrant. Alors le point anguleux devra compter pour un contact extérieur ou intérieur (*voir* la première Partie, p. 412). Nous supposerons que le cycle a été choisi, de façon à partager la nappe S_1 en deux régions dont une au moins simplement connexe.

Si la nappe S_1 est de genre 0, les deux régions sont toutes deux simplement connexes, et il faudra une convention spéciale pour décider laquelle des deux doit être regardée comme l'intérieur du cycle.

Si la nappe S_1 est de genre > 0, l'une des régions sera simplement connexe, et l'autre multiplement connexe, et ce sera la première que l'on considérera comme l'intérieur du cycle.

Cela posé, joignons deux points A et B par trois arcs de courbe AMB,

Fig. 1.



ANB, APB (*fig.* 1). Nous déterminerons ainsi trois cycles

$$C_1 = \text{ANBMA},$$
$$C_2 = \text{APBNA},$$
$$C_3 = \text{APBMA}.$$

Le troisième pourra être regardé comme la somme des deux autres

$$C_3 = C_1 + C_2.$$

Je dis que l'on aura

$$\text{ind.}\, C_3 = \text{ind.}\, C_1 + \text{ind.}\, C_2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad E_3 - I_3 - E_1 + I_1 - E_2 + I_2 = -2,$$

E_1, E_2, E_3 étant le nombre des contacts extérieurs, I_1, I_2, I_3 celui des contacts intérieurs des trajectoires avec les trois cycles.

Ces contacts se diviseront en cinq catégories :

1° Ceux qui ont lieu le long de AMB;

2° Ceux qui ont lieu le long de APB.

Les premiers n'appartiennent qu'aux cycles C_1 et C_3, les seconds n'appartiennent qu'aux cycles C_2 et C_3. Un contact d'une de ces deux catégories entrera donc deux fois dans le premier membre de l'égalité (1), une fois avec le signe +, une fois avec le signe − ; les termes correspondants se détruiront.

3° Ceux qui ont lieu le long de ANB.

Un contact de cette catégorie est extérieur pour C_1 et intérieur pour C_2, ou inversement. Il entrera donc deux fois dans le premier membre de l'égalité (1), une fois avec le signe + et une fois avec le signe —. Les termes correspondants se détruiront.

4° Ceux qui peuvent avoir lieu en A.

Suivant la position de la trajectoire qui passe en A, on pourra avoir

Ou bien un contact extérieur pour les trois cycles;

Ou bien un contact extérieur pour le cycle C_1 seulement ou pour le cycle C_2 seulement;

Ou bien (dans le cas seulement où le point A serait un angle rentrant du cycle C_3) un contact intérieur pour le cycle C_3;

Ou bien encore (dans le cas seulement où le point A serait un angle rentrant des deux cycles C_1 et C_3) un contact intérieur pour les cycles C_1 et C_3 et un contact extérieur pour C_2

Dans tous les cas, la somme des termes correspondants du premier membre de (1) se réduira à — 1.

5° Les contacts qui ont lieu en B.

Pour la même raison, la somme des termes correspondants se réduira à — 1.

Le premier membre de (1) se réduit donc à — 2, de telle façon que cette égalité est vérifiée.

Donc l'indice d'un cycle total est égal à la somme des indices des cycles partiels qui le composent.

Cherchons maintenant à déterminer l'indice d'un cycle infiniment petit.

Si le cycle infiniment petit n'enveloppe aucun point singulier, nous pourrons toujours supposer qu'il est convexe, car, s'il ne l'était pas, on pourrait le décomposer en plusieurs cycles plus petits encore et convexes. Alors la *fig.* 2 indique que le cycle a seulement deux contacts extérieurs avec les trajectoires Mp et $M''p''$.

L'indice est donc égal à o.

Si le cycle enveloppe un col, nous le supposerons encore convexe. et la *fig.* 3 montrera qu'il a quatre contacts extérieurs, et que son indice est égal à 1.

Si le cycle enveloppe un nœud ou un foyer, je dis que son indice est — 1. En effet, dans le voisinage d'un nœud ou d'un foyer, on

pourra toujours mener un cycle sans contact que nous supposerons tout entier intérieur au cycle considéré. Ce cycle considéré pourra alors être décomposé en plusieurs autres, à savoir : le cycle sans contact dont il vient d'être question et d'autres cycles convexes n'enveloppant pas le point singulier. L'indice du cycle sans contact sera égal à -1; celui des autres cycles, à 0.



L'indice du cycle total sera donc -1.

Il résulte de tout ce qui précède que l'indice d'un cycle quelconque est égal au nombre des cols qu'il contient diminué du nombre des nœuds et de celui des foyers.

Les centres qui sont des points singuliers exceptionnels rentreront, à ce point de vue, dans les foyers; en effet, autour d'un centre, on peut mener un cycle fermé avec deux contacts intérieurs et deux contacts extérieurs; ce cycle aura alors pour indice -1.

Nous allons maintenant partager la surface de la nappe S_1 en un certain nombre de régions *simplement connexes* en y traçant un certain nombre de cycles.

La somme des indices de tous ces cycles sera évidemment

$$C - F - N.$$

Pour évaluer, d'une autre manière, cette somme d'indices, nous assimilerons à un polyèdre la figure formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes.

Tout le monde connaît le théorème d'Euler, d'après lequel, si α, β, γ sont le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre

convexe, on doit avoir

$$\alpha - \beta + \gamma = 2.$$

Ce théorème s'étend aisément au cas où le polyèdre, au lieu d'être convexe, forme une surface de genre p; on trouve alors

$$\alpha - \beta + \gamma = 2 - 2p.$$

Mais, en géométrie de situation, on n'a pas à s'inquiéter de la forme des faces et des arêtes; nous n'avons donc pas besoin de supposer que les faces du polyèdre sont planes, et ses arêtes rectilignes. Il en résulte que la figure, formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes, est un véritable polyèdre curviligne auquel s'applique le théorème d'Euler. Les faces sont alors les régions simplement connexes elles-mêmes; une arête sera la portion du périmètre d'une de ces régions qui lui sert de frontière commune avec une région limitrophe; un sommet sera l'extrémité d'une arête, c'est-à-dire un point commun au périmètre de trois ou de plusieurs régions.

Supposons qu'un sommet soit commun au périmètre de ν régions; il sera assimilable à un angle solide à ν faces d'un polyèdre rectiligne. On aura, d'ailleurs,

$$\Sigma \nu = 2\beta.$$

Nous pourrons, d'ailleurs, supposer que les angles, formés par les diverses arêtes qui aboutissent à un sommet, sont tous saillants.

Nous cherchons à évaluer, pour l'ensemble de nos cycles, l'excès du nombre ΣE des contacts extérieurs sur le nombre ΣI des contacts intérieurs.

D'abord nous n'aurons pas à nous préoccuper des contacts qui ont lieu en un point d'une arête; car, si un pareil contact est extérieur par rapport au cycle qui forme le périmètre d'une des deux régions auxquelles l'arête sert de frontière commune, il sera un contact intérieur pour le périmètre de la seconde de ces régions, et réciproquement.

Nous n'avons donc à considérer que les contacts qui peuvent avoir lieu aux sommets. Soit donc un sommet commun à ν cycles. La trajectoire qui passe en ce point traversera deux de ces cycles et aura un

contact extérieur avec les $\rho - 2$ autres. On a donc

$$\Sigma E - \Sigma I = \Sigma(\rho - 2) = \Sigma\rho - 2\gamma = 2\beta - 2\gamma.$$

La somme cherchée des indices est, d'ailleurs, égale à

$$\sum \frac{E - I - 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum E - \sum I\right) - \alpha$$

ou à

$$\beta - \alpha - \gamma = 2p - 2.$$

Il vient donc

$$C - F - N = 2p - 2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte immédiatement de cette formule que les surfaces de genre 1 sont les seules qui puissent ne présenter aucun point singulier.

CHAPITRE XIV.

GÉNÉRALISATION DES DEUX PREMIÈRES PARTIES.

Nous allons reprendre maintenant chacun des théorèmes des Chapitres IV à VI pour voir s'ils s'étendent au cas qui nous occupe et dans quelle mesure ils doivent être modifiés.

Le théorème VI, d'après lequel tout cycle algébrique a un nombre de contacts pair, est encore vrai, mais seulement des cycles qui divisent la nappe S_1 en deux régions dont une au moins simplement connexe.

En effet, l'indice d'un pareil cycle, qui dépend du nombre des points singuliers qui y sont contenus, est essentiellement entier. Donc $\Sigma E - \Sigma I$ et, par conséquent, $\Sigma E + \Sigma I$, c'est-à-dire le nombre des contacts, sont toujours pairs.

Le théorème VII d'après lequel, si l'on peut mener entre deux points un arc *quelconque* sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc *algébrique* sans contact, est encore vrai pour les équations de degré supérieur. On n'a pour s'en assurer qu'à se reporter à la démonstration de la page 416, I[re] Partie. Nous aurons toutefois

une modification à y introduire; nous représenterons l'arc sans contact par les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad F(x, y, z) = 0,$$

les extrémités de cet arc correspondant à $t = 0$, $t = \pi$. La démonstration continuerait de la même façon que dans la Ire Partie.

Il importe de remarquer que les séries

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma m A_m \cos mt - \frac{x_1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{x_2}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma m B_m \cos mt - \frac{y_1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{y_2}{2}\cos\frac{t}{2}$$

sont non seulement convergentes, mais uniformément convergentes, ce qui est nécessaire pour la suite de la démonstration; car la somme de la série

$$\Sigma m A_m \cos mt,$$

reprenant la même valeur pour t et pour $2\pi - t$, est une fonction continue de t quand cette variable croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Le théorème VIII et sa démonstration subsistent aussi sans modification.

Si donc on peut joindre deux points A et B par un arc sans contact, et si A_1 et B_1 sont deux points des trajectoires qui passent par A et B, on pourra également joindre A_1 et B_1 par un arc sans contact.

Le théorème IX s'énonce ainsi :

Si AB *et* A_1B_1 *sont deux arcs de trajectoires et si* AA_1, BB_1 *sont des arcs algébriques ne coupant* AB *et* A_1B_1 *en aucun autre point que* A, B, A_1 *et* B_1, *les nombres des contacts de* AA_1 *et de* BB_1 *seront de même parité.*

Ce théorème subsistera encore dans le cas qui nous occupe, pourvu que le cycle ABA_1B_1 partage la nappe S_1 en deux régions, dont une simplement connexe.

Théorème X. — *Si un arc de trajectoire qui ne passe par aucun point singulier est sous-tendu par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.*

Ce théorème sera encore vrai, si le cycle formé par les deux arcs divise la nappe S_1 en deux régions, dont une simplement connexe.

Ainsi les théorèmes du Chap. IV, qui constituent ce que j'ai appelé la théorie des contacts, s'étendent avec quelques modifications au cas qui nous occupe. Je passe maintenant à la théorie des conséquents.

Soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact, et M_0, M_1 deux points consécutifs d'intersection de cet arc avec une même trajectoire M_1 est le conséquent de M_0, M_0 l'antécédent de M_1, et si t_0 et t_1 sont les valeurs de t qui correspondent à ces deux points M_0 et M_1, la relation qui lie t_1 et t_0 est la loi de conséquence.

Les théorèmes XI et XII ne subsistent qu'avec d'importantes modifications sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Le théorème XIII, au contraire, reste vrai pour les équations d'ordre supérieur.

Si $t_1 = \varphi_1(t_0)$ est la loi de conséquence, la fonction φ_1 est holomorphe. Il n'y a d'exception que pour les valeurs de t_0 qui correspondent à une trajectoire allant aboutir à un point singulier avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc sans contact, et pour les valeurs de t_0 ou de t_1 qui correspondent aux extrémités de cet arc sans contact.

Le théorème XIV reste vrai également, mais la démonstration doit être modifiée, car le cycle $M_0HM_1N_0M_0$ dont il est question dans la démonstration donnée dans le Chap. V pourrait ne pas partager la nappe S_1 en deux régions. Mais soit P_0 un point situé sur l'arc sans contact entre N_0 et M_1 (voir *fig.* 10, p. 257, IIe Partie) et à une distance finie de N_0. Soit P_1 un point situé sur l'arc sans contact à droite de M_1 et à une distance finie de ce point Joignons P_0P_1 par un arc de courbe tel que le cycle fermé $M_0M_1P_1P_0$ enferme une région simplement connexe. La trajectoire N_0N_1 ne pourrait sortir de cette région sans s'éloigner de la trajectoire M_0M_1 à une distance finie ou sans la traverser, ce qui est impossible. Donc le point N_1 doit être à droite du point M_1. C. Q. F. D.

Je dis qu'on peut toujours mener sur la nappe S_1 des cycles sans contact. En effet :

1° Dans le voisinage des nœuds et des foyers, on peut tracer des cycles sans contact enveloppant des points singuliers.

2° Si M_0 et M_1 sont deux points d'intersection consécutifs d'une trajectoire M_0PM_1 et d'un arc sans contact M_0QM_1, le cycle

$$M_0QM_1PM_0$$

pourra être regardé comme sans contact. Soient en effet N_0 un point infiniment voisin de M_0 et à droite de ce point comme dans la *fig.* 10 que nous venons de citer, N_1 le conséquent du point N_0. Nous pourrons tracer dans la région infiniment mince comprise entre les deux trajectoires M_0M_1 et N_0N_1 un arc N_0RM_1 ne coupant chaque trajectoire qu'une fois. Le cycle $N_0RM_1QN_0$, qui diffère infiniment peu de $M_0PM_1QM_0$, sera alors sans contact.

Ainsi donc, si la nappe S_1 contient un nœud ou un foyer, on sera certain de pouvoir tracer un cycle sans contact; si elle n'en contient pas, toute trajectoire devra couper au moins un cycle algébrique en une infinité de points (à moins de se réduire à un cycle fermé, comme nous l'avons vu dans le Chap. XII). Ce cycle algébrique pourra être partagé en un nombre fini d'arcs sans contact. Donc au moins un de ces arcs sans contact sera coupé par la trajectoire en une infinité de points. Parmi ces points, nous retiendrons deux points consécutifs M_0 et M_1 et ils nous donneront un cycle sans contact, ainsi qu'on vient de le voir. *Il y a donc toujours des cycles sans contacts à moins que toutes les trajectoires ne se réduisent à des cycles fermés.*

Si un cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions dont une simplement connexe, cette dernière contient au moins un nœud ou un foyer.

En effet, l'indice du cycle sans contact est égal à -1. Si donc N, F et C désignent le nombre des nœuds, des foyers et des cols contenus à l'intérieur de notre région simplement connexe, on aura

$$N + F - C = 1,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Supposons maintenant que le cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions pouvant toutes deux être multiplement connexes. Je dis qu'il y aura des points singuliers dans chacune de ces deux régions.

Soit R l'une de ces régions que je supposerai q fois connexe. Il s'agit de trouver l'indice du cycle sans contact C en considérant la région R comme l'intérieur de ce cycle. Nous pourrons construire une calotte R_1 simplement connexe et admettant pour frontière le cycle C. L'ensemble des deux régions R et R_1 formera alors une surface fermée de genre $\frac{q-1}{2}$, ce qui prouve en passant que q doit être impair (*cf.* Riemann, *Gesammelte Werke*, p. 12; Leipzig, Teubner, 1876). Posons donc

$$q = 2h + 1.$$

Si nous décomposons la région R en un certain nombre de régions simplement connexes, la surface fermée $R + R_1$ pourra être assimilée à un polyèdre. En appliquant à ce polyèdre le théorème d'Euler et en raisonnant comme dans le Chapitre précédent, on trouvera

$$\text{indice de C} = \Sigma i - 2h,$$

Σi désignant la somme des indices des cycles à l'aide desquels la région R a été partagée en régions simplement connexes. Or, si N, F et C sont les nombres des nœuds, des foyers et des cols de la région R, on a

$$\Sigma i = C - N - F.$$

De plus, le cycle C étant sans contact, il vient

$$\text{indice de C} = -1;$$

d'où

$$C - N - F = 2h - 1$$

ou

$$N + F + C \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2),$$

ce qui prouve que N, F et C ne peuvent pas être nuls à la fois.

Au point de vue qui nous occupe en ce moment, toute trajectoire fermée et ne passant par aucun point singulier pourra être assimilée

à un cycle sans contact, je veux dire que son indice sera égal à -1. Une trajectoire fermée n'a pas d'indice à proprement parler, mais les cycles qui en diffèrent infiniment peu en auront un, et je dis que cet indice sera -1.

En effet, il peut se présenter deux cas :

Soit M_0PM_0 une trajectoire fermée, soit AM_0B un arc sans contact, soit t le paramètre qui définit la position d'un point sur cet arc ; soit O la valeur de t qui correspond à M_0. Soit

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

la loi de conséquence sur notre arc. On aura

$$\varphi_1(O) = 0.$$

Il pourra se faire d'abord que la fonction φ_1 ne soit pas identiquement nulle. Dans ce cas, soient t_0 une valeur infiniment petite de t, N_0 le point correspondant, N_1 son conséquent et t_1 la valeur infiniment petite correspondante de t. Soit N_0QN_1 l'arc de trajectoire qui joint N_0 à N_1. Le cycle $N_0QN_1N_0$ qui différera infiniment peu de M_0PM_0 pourra être assimilé, d'après ce qu'on a vu plus haut, à un cycle sans contact. Dans ce cas, la trajectoire fermée M_0PM_0 est un *cycle limite* et jouit des propriétés de ces cycles démontrées dans la IIe Partie.

Il peut arriver aussi que la fonction φ_1 soit identiquement nulle. Dans ce cas les trajectoires voisines de M_0PM_0 sont des cycles fermés s'enveloppant mutuellement.

Si alors on mène un cycle infiniment peu différent de M_0PM_0 le nombre de ses contacts extérieurs sera le même que celui de ses contacts intérieurs et son indice sera encore -1. C. Q. F. D.

Si donc une trajectoire fermée partage la nappe S_1 en deux régions, il y aura des points singuliers dans chacune d'elles.

Donc *tout cycle algébrique qui passe par tous les points singuliers rencontre tous ceux des cycles sans contact et toutes celles des trajectoires fermées qui partagent la nappe* S_1 *en deux régions.*

C'est la généralisation du théorème XVI de la deuxième Partie.

Passons maintenant à la généralisation du théorème XVIII qui est l'objet principal de ce Chapitre. Ce théorème généralisé s'énonce ainsi :

On peut sillonner la nappe S_1 par une série de cycles et de polycycles (courbes fermées à point double), de telle façon que par chaque point de cette nappe passe un de ces cycles et un seul, excepté par les foyers et les nœuds qui seront regardés comme des cycles infiniment petits. Parmi ces cycles, les uns seront des cycles sans contact, les autres des trajectoires fermées.

Si le genre p de la nappe S_1 est égal à 0, la généralisation est immédiate. En effet, pour démontrer sur la sphère les théorèmes X à XVIII des deux premières Parties, nous nous sommes appuyés seulement sur une propriété de la sphère, celle d'être simplement connexe ou de genre 0.

Il est encore un autre cas où cette généralisation peut se faire immédiatement. Supposons qu'on ait découpé sur la nappe S_1 une région R doublement connexe et limitée par deux cycles sans contact C et C'. Supposons de plus que cette région R ne renferme aucun point singulier. Je dis que le théorème XVIII s'appliquera à cette région, c'est-à-dire qu'on pourra sillonner cette région par une infinité de cycles K qui seront tous des cycles sans contact ou des trajectoires fermées.

Il est clair d'ailleurs que ces cycles K devront être disposés de façon à partager la région R en deux autres, la première, limitée par les cycles K et C, la seconde par les cycles K et C'. En d'autres termes, il n'est pas possible que le cycle K forme à lui seul la frontière d'une région R' contenue tout entière dans R. En effet, l'indice de ce cycle est égal à -1, tandis que R, et par conséquent R', ne renfermerait pas de point singulier.

Divisons maintenant, à l'aide d'un point M quelconque, toute trajectoire en deux demi-trajectoires analogues aux demi-caractéristiques des deux premières parties. L'une de ces demi-trajectoires comprendra les points où le point mobile passera après être passé au point M et l'autre les points où le point mobile était passé avant d'arriver au point M.

Les demi-trajectoires se diviseront alors en trois catégories :

1° Les trajectoires fermées qui resteront tout entières à l'intérieur de R;

2° Les demi-trajectoires qui s'étendront indéfiniment sans jamais se fermer, et sans jamais sortir de R;

3° Les demi-trajectoires qui sortent de R par l'un des cycles C et C'.

Nous commencerons par entourer les trajectoires fermées dans des *anneaux limites* ainsi que nous l'avons fait dans la IIe Partie (p. 270). A cet effet, joignons un point de C à un point de C' par un arc algébrique quelconque. Cet arc algébrique pourra être décomposé en un nombre fini d'arcs sans contact. Par chacune des extrémités de ces divers arcs je fais passer un petit arc sans contact. J'ai ainsi tracé à l'intérieur de R un certain nombre d'arcs sans contact et je suis certain que toute demi-trajectoire de la première catégorie rencontrera au moins un d'entre eux.

Considérons un quelconque de ces arcs sans contact et cherchons quels sont ceux des points de cet arc qui ont un conséquent. Nous convenons pour cela que, si la trajectoire qui passe par un point M_0 de l'arc sans contact sort de la région R ou si elle ne vient plus couper de nouveau l'arc sans contact, le point M_0 sera regardé comme sans conséquent. Si, au contraire, la trajectoire qui passe par M_0 vient couper de nouveau l'arc sans contact en un point M_1, sans être sortie de R, le point M_1 sera le conséquent de M_0.

Parmi les arcs sans contact, en nombre fini, que j'ai tracés dans la région R, les uns ne seront rencontrés par aucune trajectoire fermée de la première catégorie et devront être rejetés, les autres seront rencontrés par au moins une trajectoire fermée; je les appellerai *arcs auxiliaires*.

Considérons un arc auxiliaire quelconque; sur cet arc on pourra toujours trouver des points admettant un conséquent; car le point où il est coupé par une trajectoire fermée est son propre conséquent. De plus aucune trajectoire issue d'un point de l'arc auxiliaire n'ira passer par un col, puisque la région R n'en renferme pas. La courbe de conséquence affectera donc l'une des formes indiquées sur la *fig.* 11 (IIe Partie, p. 258).

Nous avons vu que, si l'on joint un point M_0 d'un arc sans contact à son conséquent M_1 par un arc de trajectoire M_0PM_1, le cycle

$$M_0PM_1M_0$$

peut être regardé comme un cycle sans contact. Il y aurait exception, bien entendu, si les deux points M_0 et M_1 se confondaient, auquel cas le cycle sans contact se réduirait à une trajectoire fermée. Nous traçons les cycles sans contact ainsi obtenus pour tous les points de l'arc auxiliaire qui admettent un conséquent. L'ensemble de ces cycles formera alors un anneau limite comme ceux que nous avons envisagés dans la IIe Partie.

Cet anneau limite sera sillonné par une série de cycles sans contact dont quelques-uns se réduiront à des trajectoires fermées. De plus cet anneau limite partagera la région R en deux autres régions analogues R′ et R″, ne renfermant plus qu'un nombre moindre d'arcs auxiliaires.

En continuant de la sorte sur les deux régions R′ et R″, on arrivera à partager la région R en un certain nombre d'anneaux limites et en un certain nombre de régions interannulaires à l'intérieur desquelles on ne pourra plus tracer aucune trajectoire fermée (*cf.* IIe Partie, p. 272).

Considérons une de ces régions interannulaires; elle sera tout à fait analogue à la région R; seulement on n'y pourra pas tracer de demi-trajectoires de la première catégorie. Je dis qu'on n'en pourra pas non plus tracer de la deuxième.

En effet, toute demi-trajectoire de la deuxième catégorie admet un cycle limite qui ne pourrait être qu'une demi-trajectoire de la première; car, dans l'intérieur de la région R, les théorèmes du Chapitre V s'appliquent sans restriction; donc une demi-trajectoire ne peut rester constamment à l'intérieur de la région interannulaire qui n'est traversée par aucune trajectoire de la première catégorie.

Ainsi une région interannulaire ne peut renfermer que des demi-trajectoires de la troisième catégorie; d'où il suit que toute trajectoire qui traverse cette région va aboutir de part et d'autre à deux extrémités situées sur les deux cycles γ et γ' qui limitent la région. Il n'est pas possible que les deux extrémités soient sur un même cycle γ; car un arc sans contact ne peut sous-tendre un arc de trajectoire.

Donc toute trajectoire tracée dans la région interannulaire va d'un point du cycle γ à un point du cycle γ'; ce qui démontre la possibilité de sillonner cette région de cycles sans contact.

Le théorème XVIII est donc démontré pour la région R.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où la loi de conséquence

sur un des arcs auxiliaires s'écrit $t_1 = t_0$. On reconnaîtrait alors par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé à la fin du Chap. XI en remarquant que la région R ne renferme aucun point singulier et que toutes les trajectoires qui traversent cette région sont fermées.

Si on laisse de côté ce cas particulier, toutes les trajectoires fermées sont des cycles limites; et le théorème XVII, d'après lequel ces cycles limites sont en nombre fini, se généralise aisément. (Il ne s'agit jusqu'ici, bien entendu, que des cycles limites et trajectoires fermées situés tout entiers à l'intérieur de R.)

Les théorèmes XVII et XVIII sont encore vrais quand un des cycles C et C' qui limitent la région R, au lieu d'être un cycle sans contact, devient une trajectoire fermée. Il y aurait exception toutefois pour le théorème XVII si le cycle C se réduisait à une trajectoire fermée allant passer par un col.

Il me reste, pour démontrer les théorèmes XVII et XVIII dans toute leur généralité, à faire voir la possibilité de décomposer la nappe S_1 en un certain nombre de régions telles que R.

Pour cela, nous allons d'abord faire quelques remarques préliminaires.

Nous avons vu que si l'on joint deux points M_0 et M_1 d'un arc sans contact par un arc de trajectoire M_0PM_1, le cycle $M_0M_1PM_0$ peut être regardé comme sans contact, c'est-à-dire que par chacun de ses points on peut mener un cycle sans contact qui diffère infiniment peu du cycle $M_0M_1PM_0$.

De même, supposons qu'un arc de trajectoire M_0QM_1 vienne aboutir en M_1 à un cycle sans contact M_1PM_1. Je dis que le cycle

$$M_1PM_1QM_0QM_1$$

pourra être regardé comme sans contact.

En effet, soient $M'_0Q'M'_1$, $M''_0Q''M''_1$, ..., $M^k_0Q^kM^k_1$ des arcs de trajectoire infiniment peu différents de M_0QM_1. Nous pourrons toujours tracer un arc de courbe, quittant le cycle sans contact M_1PM_1 en M'_1, coupant chacun de ces arcs de trajectoire en un seul point, allant passer par le point M_0 et venant rejoindre le cycle sans contact en M^k_1.

Le cycle fermé $M_1^k P M'_1 Q'' M_0 M_1^k$, qui diffère infiniment peu de

$$M_1 P M_1 Q M_0 Q M_1,$$

sera alors sans contact.

Imaginons maintenant qu'on ait tracé sur la nappe S_1 un certain nombre de cycles sans contact (ou de trajectoires fermées), et qu'on ait déterminé ainsi sur cette nappe une certaine région P limitée par ces divers cycles sans contact. (Il peut se faire que la région P contienne la nappe S_1 tout entière; ainsi supposons que S_1 soit un tore, et qu'on ait tracé sur ce tore un cercle méridien C qui soit un cycle sans contact. La nappe S_1 forme alors tout entière une région P limitée par *deux* cycles, car on devra distinguer les deux lèvres de la coupure que l'on a faite sur le tore.)

Cela posé, je dis que par tout point M_0 de la région P on peut tracer *à l'intérieur de cette région* un cycle sans contact. Considérons, en effet, la demi-trajectoire qui passe par M_0. Voici les cas qui pourront se présenter :

1° Il pourra arriver que la demi-trajectoire se ferme sans être sortie de la région P. C'est le seul cas d'exception; on ne pourra pas faire passer par le point M_0 de cycle sans contact, mais seulement une trajectoire fermée.

2° Ou bien que la demi-trajectoire $M_0 Q M_1$ sorte de la région P en M_1 par un des cycles sans contact qui la limitent, par exemple par le cycle $M_1 H M_1$. Dans ce cas, le cycle $M_1 H M_1 Q M_0 Q M_1$ peut être regardé comme sans contact, ainsi qu'on vient de le voir.

3° Ou bien que la demi-trajectoire aboutisse à un nœud ou à un foyer. Ce cas se ramène au précédent, car on peut entourer le nœud ou le foyer d'un petit cycle sans contact, que la trajectoire est obligée de traverser pour aboutir au nœud ou au foyer.

4° Ou bien que la demi-trajectoire s'étende indéfiniment, sans se fermer, sans aboutir à un nœud ou à un foyer, et sans sortir de la région P. On pourra alors trouver, dans la région P, un arc sans contact qui coupe la demi-trajectoire en deux points N_0 et N_1. Il s'ensuit, d'après le théorème VIII, qu'on pourra joindre M_0 à un autre point M_1 de la demi-trajectoire par un arc sans contact. Dans ce cas, le cycle

formé par l'arc sans contact M_0M_1 et par l'arc de trajectoire M_0M_1 pourra être regardé comme sans contact.

Ainsi l'on pourra toujours mener, par le point M_0 et dans la région P, un cycle sans contact qui pourra, dans certains cas, se réduire à une trajectoire fermée.

Si le point M_0 est un col, il aboutit à ce col, non par deux, mais par quatre demi-trajectoires. On peut alors mener par le point M_0 *deux* cycles sans contact formant, par leur ensemble, une courbe fermée à point double.

Cela posé, voici comment nous opérerons pour partager la nappe S_1 en régions analogues à R. Nous commencerons par envelopper tous les nœuds et tous les foyers par des cycles infiniment petits sans contact Soit dans la région P ainsi déterminée un col quelconque; par ce col, je pourrai faire passer deux cycles sans contact; j'aurai alors divisé la nappe S_1 en régions P plus petites; j'opérerai de même sur chacun des cols, et j'aurai finalement partagé la nappe S_1 en un certain nombre de régions R limitées par des cycles sans contact et ne contenant aucun point singulier.

Je dis que chacune de ces régions est doublement connexe et limitée par deux cycles seulement.

Supposons, en effet, que la région R soit q fois connexe et limitée par n cycles.

Nous aurons d'abord (voir RIEMANN, *loc. cit.*, p. 12).

$$q > n > 0, \quad q \equiv n \pmod{2}.$$

De plus, chacun des cycles a pour indice -1, et il n'y a pas de point singulier dans la région. Si nous fermons la région R en construisant, sur chacun des cycles C qui la limitent, une calotte simplement connexe, puis que nous divisions la région elle-même en domaines simplement connexes par des cycles C', nous obtiendrons une sorte de polyèdre curviligne qui sera de genre $\frac{q-n}{2}$. Le théorème d'Euler nous donnera donc

$$\Sigma i + \Sigma i' = q - n - 2,$$

si l'on désigne par Σi la somme des indices des cycles C et par $\Sigma i'$

la somme des indices des cycles C'. Or on a

$$\Sigma i = -n, \quad \Sigma i' = 0,$$

d'où

$$q = 2, \quad n = 2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi toutes nos régions sont doublement connexes et limitées par deux cycles : nous pouvons donc sillonner chacune d'elles de cycles sans contact, ce qui démontre le théorème XVIII dans toute sa généralité.

Quand on aura construit sur la nappe S_1 une série de cycles sans contact et de cycles limites s'enveloppant mutuellement, on pourra s'en servir pour construire les trajectoires elles-mêmes.

Si un cycle sans contact divise S_1 en deux régions, il ne pourra être coupé en plus d'un point par une même trajectoire.

Cela ne sera plus vrai, au contraire, si le cycle sans contact ne partage pas S_1 en deux régions; mais, même dans ce cas, la considération des cycles sans contact n'en conserve pas moins une importance capitale. C'est ce que l'on comprendra mieux par les exemples que je vais donner dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XV.

ÉTUDE PARTICULIÈRE DU TORE.

Les surfaces de genre 1 sont, comme on l'a vu, les seules sur lesquelles il puisse n'exister aucun point singulier. Après le cas des surfaces de genre zéro, qui ne diffère pas en réalité de ceux qui ont été traités dans les deux premières parties, le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui des surfaces de genre 1 sans point singulier. C'est donc celui que nous allons étudier en détail.

Pour fixer davantage encore les idées, je supposerai que la surface S_1 se réduit au tore

$$z^2 + \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = r^2.$$

Mais tout ce que nous dirons du tore s'appliquera à une surface

quelconque du genre 1, qui n'en diffère pas au point de vue de la géométrie de situation.

Nous poserons

$$x = (R + r\cos\omega)\cos\varphi,$$
$$y = (R + r\cos\omega)\sin\varphi,$$
$$z = r\sin\omega.$$

Nous mettrons les équations différentielles sous la forme

$$\frac{d\omega}{dt} = \Omega, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi.$$

Ω et Φ devront être des polynômes entiers en $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

On trouve, d'ailleurs,

$$\cos\varphi = \frac{x(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)}{2R(x^2+y^2)}, \quad \sin\varphi = \cos\varphi\frac{y}{x},$$
$$\sin\omega = \frac{z}{r}, \quad \cos\omega = \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi - R}{r},$$

ce qui montre que si Ω et Φ sont des polynômes entiers en $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ seront des fonctions rationnelles en x, y et z.

Pour bien saisir la suite de la discussion, il faut se reporter aux Chapitres VIII et IX (IIe Partie). Nous allons, en effet, appliquer les mêmes méthodes et partager le tore en régions acycliques (sillonnées par des cycles sans contact, parmi lesquels il n'y a aucun cycle limite), en régions cycliques (sillonnées par des cycles sans contact, parmi lesquels il y a certainement des cycles limites), en régions monocycliques (où il y a un cycle limite *et un seul*), et en régions douteuses (où l'on ne saurait affirmer qu'il y ait ni qu'il n'y ait pas de cycle limite). La discussion sera terminée lorsqu'il ne restera plus que des régions acycliques et monocycliques.

Le problème revient donc à savoir si une région est cyclique, et si elle est monocyclique. Voici les règles que nous appliquerons pour le

reconnaître, et qui ne seront autre chose que celles que nous avons exposées dans le Chapitre VIII.

1° Soit une région R doublement connexe limitée par deux cycles sans contact C et C′, et soit AMB un arc algébrique quelconque coupant ces deux cycles en A et en B. Considérons un observateur suivant cet arc et pénétrant dans la région R par le point A. S'il a à sa droite la demi-trajectoire qui s'étend dans la région R à partir du point A, nous dirons que le cycle C est positif, il sera négatif dans le cas contraire. Supposons maintenant que l'observateur, en suivant cet arc, sorte de la région R par le point B. De ce point B partiront deux demi-trajectoires, l'une s'étendant à l'intérieur de R, l'autre à l'extérieur de cette région. C'est cette dernière que nous considérerons. Si elle est à la droite de l'observateur, le cycle C′ sera positif (*cf.* Chap. VIII, p. 286).

Si les deux cycles sont de même signe, le nombre des cycles limites contenus dans la région R est de même parité que le nombre des contacts de l'arc AMB; il est de parité différente dans le cas contraire.

En particulier, supposons que les deux cycles C et C′ soient deux cercles méridiens $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_1$. Supposons que, dans la région R et sur sa frontière, Ω soit constamment de même signe; supposons que le long du cycle C on ait

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

et que le long du cycle C′ on ait

$$\frac{d\varphi}{dt} < 0.$$

Prenons pour l'arc AMB l'arc de parallèle $\omega = 0$, qui est sans contact. Les deux cycles seront de signe contraire. Le nombre des cycles limites contenus dans R sera donc impair. Donc cette région est certainement cyclique.

2° Soient ρ et θ les coordonnées polaires d'un point dans un plan; supposons qu'on établisse entre ω et φ d'une part, ρ et θ d'autre part, une relation telle que la région R du tore et une certaine région R_1 doublement connexe du plan se correspondent point par point et

d'une façon uniforme. Supposons que, toutes transformations faites, l'équation différentielle proposée s'écrive

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varphi(\rho, \theta).$$

Si dans la région R il y a plus de deux cycles limites, il y aura forcément dans la région des points où

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \varphi = \infty$$

(*cf.* Chap. XIII, théorème XIX).

Soient, en particulier,

$$\theta = \omega, \quad \rho = \varphi + \text{K},$$

K étant une constante quelconque.

Si dans la région R la fonction Ω ne s'annule pas, ni non plus la fonction $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, la région R est certainement acyclique ou monocyclique.

Nous étudierons d'abord l'exemple suivant

$$\frac{d\varphi}{dt} = a + b\cos\omega - \cos\varphi, \quad \frac{d\omega}{dt} = c,$$

a, b, c étant des constantes telles que

$$a > b > 0, \quad a + b < 1, \quad c > 0.$$

Nous poserons

$$a + b = \cos\varphi_0, \quad a - b = \cos\varphi_1,$$

les angles φ_0 et φ_1 étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ ne s'annulant jamais, tous les parallèles $\omega = \text{const.}$ sont des cycles sans contact. Voilà donc un premier système de cycles sans contact parmi lesquels il n'y a aucun cycle limite.

Maintenant, on voit aisément que, si φ est compris entre φ_1 et $2\pi - \varphi_1$,

$\frac{d\varphi}{dt}$ est positif, et que, si φ est compris entre $-\varphi_0$ et $+\varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt}$ est négatif. Le tore se trouve ainsi partagé en quatre régions, les régions

$$\varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0,$$

où tous les méridiens sont des cycles sans contact (ce sont des régions acycliques), et les régions $R(\varphi_0 < \varphi < \varphi_1)$ et $R'(-\varphi_1 < \varphi < -\varphi_0)$ qui sont douteuses.

Considérons, en particulier, la région R. Je dis d'abord qu'elle est cyclique, car on a

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0 \quad \text{pour le cycle } \varphi = \varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} < 0 \quad \text{pour le cycle } \varphi = \varphi_0,$$

et, de plus,

$$\frac{d\omega}{dt} > 0.$$

Les deux cycles sans contact $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_0$ qui limitent la région R sont donc de signe contraire, si l'on prend pour l'arc AMB, dont il a été question plus haut, l'arc sans contact $\omega = 0$. Donc la région R contient au moins un cycle limite.

De plus, elle n'en peut contenir plus d'un; car, si elle en contenait deux, on devrait avoir à l'intérieur de R soit $\Omega = 0$, soit $\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0$.

Or Ω ne s'annule jamais, et $\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sin\varphi$ ne peut s'annuler que pour $\varphi = m\pi$, c'est-à-dire en dehors de R.

Donc dans la région R on peut tracer un cycle limite et un seul, que j'appelle C.

Pour la même raison, dans la région R', on peut tracer un cycle limite et un seul que j'appelle C'.

Nous sommes donc conduits à un second système de cycles sans contact parmi lesquels il y a deux cycles limites C et C' et une infinité de méridiens.

Les deux cycles C et C' partagent le tore en deux régions P et P', toutes deux sillonnées de cycles sans contact. Considérons le point

mobile dont le mouvement est défini par nos équations différentielles. Si, à l'origine du temps, ce point mobile est dans une des deux régions P ou P', il n'en pourra jamais sortir. Si donc sa coordonnée φ est à l'origine du temps comprise entre φ_1 et $2\pi - \varphi_1$, elle restera toujours comprise entre φ_0 et $2\pi - \varphi_0$.

De plus, dès que le point mobile aura franchi un des cycles sans contact du second système, il ne pourra plus le franchir de nouveau. Quand le temps croîtra indéfiniment, le point mobile se rapprochera asymptotiquement de l'un des deux cycles limites C et C'.

En d'autres termes, et pour reprendre le langage du Chapitre X, l'orbite du point mobile sera instable.

Le second exemple que nous traiterons sera encore plus simple que le précédent.

J'écrirai simplement

$$\frac{d\omega}{dt} = a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = b,$$

a et b étant deux constantes positives. On voit immédiatement que tous les parallèles et tous les méridiens sont des cycles sans contact, et que l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{\omega}{a} = \frac{\varphi}{b} = \text{const.}$$

Si le rapport $\frac{a}{b}$ est commensurable, toutes les trajectoires sont fermées; il y a donc stabilité.

Supposons maintenant que le rapport $\frac{a}{b}$ soit incommensurable; il y aura encore stabilité en ce sens, que si l'on considère une portion p du tore, si petite qu'elle soit, cette portion sera traversée une infinité de fois par une quelconque des trajectoires. Si le point mobile occupe à l'origine des temps un certain point A, il ne viendra pas repasser en ce point, mais il viendra une infinité de fois passer en des points infiniment voisins.

Considérons la courbe

$$\omega = c\varphi + d,$$

c étant une constante commensurable et d une constante quelconque.

Cette courbe sera un cycle fermé, et il est aisé de voir que ce sera toujours un cycle sans contact

On peut donc tracer sur le tore une infinité de systèmes de cycles sans contact, parmi lesquels il n'y a aucun cycle limite.

Les deux exemples qui précèdent suffisent déjà pour faire comprendre que la présence d'un cycle limite est un signe d'instabilité, et l'absence d'un pareil cycle, un signe de stabilité. Mais, pour mieux se rendre compte de ce fait important, il est indispensable de pénétrer plus avant dans la question.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ω et φ vont constamment en croissant avec le temps, c'est-à-dire que Ω et Φ sont toujours positifs, et de plus qu'il n'y a sur le tore aucun point singulier.

Considérons le méridien $\varphi = 0$, qui sera un cycle sans contact. Soit $M(0)$ un point de ce méridien où se trouve le point mobile à l'origine des temps. Ce point aura pour coordonnées

$$(\varphi = 0,\ \omega = \omega_0).$$

Si l'on fait croître le temps, ω et φ croîtront également, de sorte que φ finira par devenir égal à 2π; le point mobile sera venu alors en un point $M(1)$ qui sera situé sur le cycle sans contact $\varphi = 0$ d'où nous sommes partis, qui sera le conséquent du point $M(0)$ et qui aura pour coordonnées

$$(\varphi = 2\pi,\ \omega = \omega_1).$$

Les deux quantités ω_0 et ω_1 seront liées par une certaine relation qui n'est autre chose que la loi de conséquence du Chapitre V. J'écrirai cette loi sous la double forme

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_0 = \theta(\omega_1).$$

Les hypothèses faites permettent d'énoncer au sujet de cette loi de conséquence les principes suivants :

Premier principe. — La fonction ψ est continue.

Deuxième principe. — La fonction ψ croît constamment avec ω_0, de telle sorte que

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} > 0,$$

et, de plus, on a

$$\psi(\omega_0 + 2\pi) = \psi(\omega_0) + 2\pi.$$

Troisième principe. — La fonction ψ est holomorphe pour toutes les valeurs réelles de ω_0.

D'ailleurs il est clair que la fonction θ jouit des mêmes propriétés que la fonction ψ.

Soient maintenant $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(i)$ les conséquents successifs et $M(-1)$, $M(-2)$, ..., $M(-i)$ les antécédents successifs de $M(0)$. Leurs coordonnées ω_1, ω_2, ... et ω_{-1}, ω_{-2}, ... nous seront données par les équations

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_2 = \psi\psi(\omega_0), \quad \omega_3 = \psi\psi\psi(\omega_0), \quad \ldots,$$
$$\omega_{-1} = \theta(\omega_0), \quad \omega_{-2} = \theta\theta(\omega_0), \quad \omega_{-3} = \theta\theta\theta(\omega_0), \quad \ldots$$

Les points M forment un ensemble de points que j'appellerai P, d'après la notation adoptée par M. Cantor. J'appellerai P' l'ensemble dérivé de P, c'est-à-dire l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points appartenant à l'ensemble P. Enfin je désignerai par

$$D(P, Q)$$

l'ensemble des points communs à deux ensembles P et Q. Je renverrai, pour plus de détails sur les ensembles de points et l'emploi des notations qui précèdent, à divers Mémoires de M. Cantor, parus en allemand dans les *Mathematische Annalen* et en français dans les *Acta mathematica*.

Je puis alors me poser les questions suivantes :

1° Quelles sont les propriétés de l'ensemble P des points M et de ses dérivés?

2° Dans quel ordre circulaire sont distribués les points M sur le cercle méridien $\varphi = 0$?

Je vais démontrer d'abord que l'on a

$$D(P, P') = 0$$

ou bien

$$D(P, P') = P.$$

En d'autres termes, si l'ensemble P a un point commun avec son dérivé P′, tous ses points feront partie de cet ensemble dérivé.

En effet, soit $M(i)$ un point de P appartenant à P′; d'après la définition de P′, il y aura, dans le voisinage de $M(i)$, une infinité de points appartenant à P. Nous pourrons donc trouver une série de points

$$M(k_1),\quad M(k_2),\quad \ldots,\quad M(k_p),\quad \ldots$$

appartenant à P, et tels que

$$\lim M(k_p) = M(i) \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

Cela posé, soit $M(\nu)$ un point quelconque de P. Considérons les points

$$M(k_1 - i + \nu),\quad M(k_2 - i + \nu),\quad \ldots,\quad M(k_p - i + \nu),\quad \ldots.$$

En vertu de la continuité de la fonction ψ, on aura

$$\lim M(k_p - i + \nu) = M(\nu) \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

Donc $M(\nu)$, et, par conséquent, tout point de P appartient à P′.

C. Q. F. D.

La condition $D(P, P') = 0$, traduite dans le langage du Chapitre X, signifie que la trajectoire est instable. En effet, le point $M(0)$ n'appartenant pas à P′, le point mobile ne reviendra jamais dans le voisinage de son point de départ. Il y a exception toutefois lorsque la trajectoire est fermée.

Théorème XX. — *Si l'on a pour toutes les trajectoires* $D(P, P') = 0$, *il y a certainement un cycle limite, à moins que toutes les trajectoires ne soient fermées.*

Soit, en effet, $N(0)$ un point de P′, dans le voisinage duquel se trouve par définition une infinité de points de P. Soit Q l'ensemble des points $N(i)$, c'est-à-dire des antécédents et des conséquents successifs de $N(0)$.

Il n'est pas possible que, dans tout intervalle compris entre deux

points quelconques de P, il y ait un point de Q; car, dans le voisinage de N(o), il y a une infinité de pareils intervalles : il y aurait donc une infinité de points de Q, ce qui est impossible en vertu de l'hypothèse

$$D(Q, Q') = 0.$$

Soient donc M(o) et $M(i)$ deux points de P entre lesquels il n'y ait aucun point de Q. Il n'y en aura pas non plus entre $M(i)$ et $M(2i)$: car, si le point $N(k)$ se trouvait entre $M(i)$ et $M(2i)$, le point $N(k-i$ serait entre M(o) et $M(i)$, puisque la fonction ψ est constamment croissante. Il n'y en aura pas non plus dans l'intervalle compris entre $M(pi)$ et $M(pi+i)$. De plus, si le point $M(i)$ est à droite du point M(o), par exemple, le point $M(pi+i)$ sera à droite de $M(pi)$. Lorsque p croîtra, la seconde coordonnée ω du point $M(pi)$ variera donc toujours dans le même sens; elle ira, par exemple, toujours en croissant, mais elle ne pourra croître indéfiniment, sans quoi N(o) se trouverait dans un des intervalles. Cette coordonnée ω tendra donc vers une certaine limite qui correspondra à un point P(o) du cercle méridien : on aura donc

$$\lim M(pi) = P(0) \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On en déduit

$$\lim M(pi + k) = P(k),$$

$$\lim M(pi + i) = P(i),$$

$$P(0) = P(i).$$

Ainsi le i^{ieme}, conséquent du point P(o), est ce point lui-même. Donc la trajectoire qui passe par ce point est fermée, et il est aisé de voir que c'est un cycle limite.

La condition $D(P, P') = P$ signifie que la trajectoire est stable. En effet, dire que le point de départ M(o) appartient à P', c'est dire que le point mobile reviendra une infinité de fois dans le voisinage dans ce point.

Si donc on a, pour toutes les trajectoires $D(P, P') = P$, la stabilité est certaine. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le second des exemples cités plus haut.

Mais on peut se demander s'il n'arrive pas aussi que l'on ait

$D(P, P') = 0$ pour certaines trajectoires et $D(P, P') = P$ pour d'autres; ce sera là l'origine de toutes les difficultés que nous rencontrerons dans la suite.

Avant d'aller plus loin, je vais établir le lemme suivant :

Soient $M(0)$ *et* $N(0)$ *deux points quelconques,* $M(i)$ *et* $N(i)$ *leurs* $i^{\text{ièmes}}$ *conséquents. Si ces deux derniers sont contenus tous deux dans l'intervalle* $M(0)$, $N(0)$, *je dis qu'il y aura un cycle limite.*

En effet, s'il en est ainsi, les deux points $M(2i)$ et $N(2i)$ seront compris tous deux dans l'intervalle $M(i)N(i)$, les deux points $M(3i)$ et $N(3i)$, dans l'intervalle $M(2i)N(2i)$, ... Donc, lorsque p croîtra, la seconde coordonnée ω du point $M(pi)$ variera toujours dans le même sens, sans pouvoir pourtant dépasser une certaine limite. On en conclut, comme plus haut, l'existence d'un point $P(0)$, tel que

$$\lim M(pi) = P(0) \quad \text{pour} \quad p = \infty,$$

et, par conséquent, celle d'un cycle limite.

Occupons-nous maintenant de déterminer l'ordre circulaire dans lequel sont disposés les points $M(i)$, en laissant de côté le cas où il y a un cycle limite et où cet ordre se détermine aisément.

Soient α_0 la longueur de l'arc $M(0)M(1)$, α_1 celle de l'arc $M(1)M(2)$, ... et, en général, α_i celle de l'arc $M(i)M(i+1)$. Je dis que le rapport

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+n}}{n}$$

tendra, quand on fera croître n indéfiniment, vers une limite finie, déterminée, indépendante de i, mais incommensurable avec $2\pi r$.

Prenons, à partir du point $M(0)$, un arc L du cercle méridien, égal à k circonférences entières, c'est-à-dire à $2k\pi r$, et supposons

$$(1)\qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu < 2k\pi r < \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu+1}.$$

D'après cette inégalité, il y a, sur l'arc L, $\nu + 2$ points de P, à savoir : $M(0)$, $M(1)$, ..., $M(\nu+1)$, et il n'y en a pas davantage.

Pour bien entendre cette proposition et pour éviter toute confusion, il importe de faire la remarque suivante :

La seconde coordonnée ω d'un point M du cercle méridien $\varphi = 0$ n'est pas entièrement déterminée; car on retrouve le même point en augmentant ω d'un multiple de 2π. Si toutefois on se donne ω_0, les coordonnées ω_i des conséquents successifs $M(i)$ sera *entièrement* déterminée par les équations

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_i = \psi(\omega_{i-1}).$$

Nous supposerons donc que nous nous sommes donné ω_0, et nous pourrons regarder ω_i comme complètement déterminé.

Il pourra être avantageux, dans certains cas, d'envisager non pas la coordonnée ω_i elle-même, mais une quantité congrue à ω_i suivant le module 2π et comprise entre α et $\alpha + 2\pi$ (α étant la seconde coordonnée d'un certain point N du cercle méridien). Nous désignerons cette quantité par la notation (ω_i, α), et nous l'appellerons coordonnée du point $M(i)$ réduite par rapport au point N.

Ainsi, dans la démonstration du théorème XX, nous avons dit que, quand on faisait croître p, la seconde coordonnée ω_{pi} du point $M(pi)$ variait toujours dans le même sens, sans jamais dépasser une certaine limite. Il s'agissait, non de la quantité ω_{pi} elle-même, telle que nous venons de la définir, mais de cette coordonnée réduite par rapport au point $N(0)$.

Au contraire, dans tout ce qui va suivre, il s'agira toujours, sauf avis contraire, de la coordonnée ω_i elle-même.

Ainsi, quand je dis que l'arc L contient les $\nu + 2$ conséquents successifs $M(0)$, $M(1)$, ..., $M(\nu + 1)$, je veux dire que les coordonnées ω_0, ω_1, ..., $\omega_{\nu+1}$ sont comprises entre ω_0 et $\omega_0 + 2k\pi$.

En écrivant les inégalités (1), j'ai supposé que tous les arcs α_0, α_1, ..., α_i étaient positifs. C'est, en effet, ce qui arrive. Je puis toujours supposer que

$$\omega_1 > \omega_0,$$

car nous ne pouvons avoir $\omega_1 = \omega_0$, sans quoi nous aurions affaire à une trajectoire fermée, ce que nous ne supposons pas, et, si nous avions $\omega_1 < \omega_0$, nous compterions les arcs ω en sens contraire.

Le deuxième principe donne alors

$$\omega_{i+1} > \omega_i$$

ou

$$\alpha_i > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soient maintenant $N(0)$ un point quelconque contenu entre $M(0)$ et $M(1)$, ω'_0 sa coordonnée, de telle sorte que

$$\omega_0 < \omega'_0 < \omega_1.$$

Soit ω'_i la coordonnée de son $i^{\text{ième}}$ conséquent $N(i)$. Je dis que

$$\omega_i < \omega'_i < \omega_{i+1};$$

car, si l'on avait

$$\omega'_i < \omega_i,$$

les deux points $N(0)$ et $N(i)$ seraient compris entre les points $M(0)$ et $M(i)$, et si l'on avait

$$\omega'_i > \omega_{i+1},$$

les deux points $M(1)$ et $M(i+1)$ seraient compris entre les points $N(0)$ et $N(i)$. Dans les deux cas, en vertu d'un lemme démontré plus haut, il y aurait un cycle limite, ce que nous ne supposons pas.

De même, si nous avions

$$\omega_h < \omega'_0 < \omega_{h+1},$$

nous en déduirions

$$\omega_{i+h} < \omega'_i < \omega_{i+h+1}.$$

D'ailleurs, nous avons, par l'inégalité (1),

$$\omega_{\nu+1} < \omega_0 + 2k\pi < \omega_{\nu+2},$$

et puisque

$$\omega_1 + 2k\pi = \psi(\omega_0 + 2k\pi),$$

$$\omega_{\nu+2} < \omega_1 + 2k\pi < \omega_{\nu+3}.$$

Si donc nous prenons, à partir du point $M(1)$, un arc égal à $2k\pi r$, c'est-

à-dire à L, il y aura sur cet arc $\nu + 2$ points de P, à savoir : $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(\nu + 2)$.

En raisonnant de même, on verrait que, si l'on prend, à partir d'un point de P, un arc égal à L, il y aura sur cet arc $\nu + 2$ points de P.

Si maintenant on prend un point N sur l'arc α_0, puis, à partir de ce point N, un arc égal à L, cet arc contiendra certainement les points $M(1)$, $M(2)$, .., $M(\nu + 1)$, il contiendra ou ne contiendra pas le point $M(\nu + 2)$, et il ne contiendra certainement pas $M(\nu + 3)$.

On raisonnerait de même si le point N était sur un arc quelconque α_i, d'où la conclusion suivante :

Le nombre des points de P situés sur un arc quelconque égal à $2k\pi r$ est égal à $\nu + 1$ ou à $\nu + 2$.

Si l'on donne à k une valeur différente k', il en résultera pour ν une valeur différente ν'. Je considère les deux intervalles compris, d'une part, entre $\frac{\nu+1}{k}$ et $\frac{\nu+2}{k}$ et, d'autre part, entre $\frac{\nu'+1}{k'}$ et $\frac{\nu'+2}{k'}$. Je dis que ces deux intervalles auront une partie commune. Considérons, en effet, un arc égal à $2kk'\pi r$ et sur lequel il y ait M points de P. Il viendra

$$(\nu + 1)k' < M < (\nu + 2)k',$$
$$(\nu' + 1)k < M < (\nu' + 2)k,$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Il en serait encore de même si, au lieu de considérer seulement deux valeurs de k et deux intervalles, nous en avions considéré trois ou plusieurs.

Ainsi, si l'on donne à k toutes les valeurs entières positives, tous les intervalles $\frac{\nu+1}{k}$, $\frac{\nu+2}{k}$ auront une partie commune, et, de plus, l'étendue de l'intervalle tendra vers zéro.

Donc $\frac{\nu+1}{k}$ et $\frac{\nu+2}{k}$ tendront vers une limite commune, finie et déterminée que j'appelle μ.

Le nombre μ ne peut pas être commensurable.

En effet, s'il était égal à 2 par exemple, il faudrait que nous eussions

$$\nu + 1 = 2k \quad \text{ou} \quad \nu + 2 = 2k.$$

Soient, pour $k = 1$, $\nu + 1 = 2$, $\nu + 2 = 3$.

On aura, pour $k > 1$,

$$\nu + 2 \geq 2k + 1;$$

d'où

$$\nu + 2 = 2k + 1.$$

On en déduit aisément que l'ordre circulaire des points $M(i)$, où l'indice i est positif, est l'inverse du suivant :

$$[M(0), M(2), M(4), \ldots, \text{ad inf.}; M(1), M(2), \ldots, \text{ad inf.}],$$

ce qui impliquerait l'existence d'un cycle limite.

Si l'on avait, au contraire, pour $k = 1$, $\nu + 2 = 2$, il viendrait, pour $k > 1$,

$$\nu + 2 \leq 2k;$$

d'où

$$\nu + 2 = 2k.$$

L'ordre circulaire serait alors l'ordre inverse du précédent, et il y aurait encore un cycle limite.

Donc μ est incommensurable.

On aura évidemment

$$\lim \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+n}}{n} = \frac{2\pi r}{\mu} \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

ce que nous avions annoncé.

Nous pouvons donc dire que l'ordre circulaire des points de P est caractérisé par un certain nombre incommensurable μ, et c'est ce résultat que nous allons chercher maintenant à énoncer d'une façon plus précise.

Pour mettre en évidence ce fait que ν est fonction de k, j'écrirai $\nu(k)$, au lieu de ν. J'envisagerai ensuite les $\nu(k) + 2$ points :

$$(2) \qquad M(0),\ M(1),\ M(2),\ \ldots,\ M[\nu(k) + 1],$$

et cherchons dans quel ordre circulaire ils sont placés.

Il faudra d'abord placer $M(0)$, $M(1)$, $\ldots$, $M[\nu(1) + 1]$ sur le cercle méridien dans l'ordre de leurs indices. Ensuite $M[\nu(1) + 2]$ viendra se

placer entre $M(0)$ et $M(1)$, $M[\nu(1)+3]$ entre $M(1)$ et $M(2)$, et ainsi de suite jusqu'à $M[\nu(2)+1]$ qui viendra se placer entre $M[\nu(1)+1]$ et $M(0)$. Le point suivant $M[\nu(2)+2]$ sera placé entre $M(0)$ et $M(1)$; il reste à savoir s'il sera avant $M[\nu(1)+2]$ ou après ce point. Il sera avant si

$$\nu(2)+2=2\nu(1)+3$$

et après s

$$\nu(2)+2=2\nu(1)+4,$$

ce qui sont les deux seuls cas possibles.

On continuera de la sorte, et l'on ne sera jamais embarrassé pour placer un nouveau point si l'on connaît les k nombres

$$\nu(1),\ \nu(2),\ \ldots,\ \nu(k).$$

Ainsi l'ordre circulaire des points (2) ne dépend que de ces k nombres, c'est-à-dire de μ, et il est le même que celui des quantités $\mu i - \mathrm{E}(\mu i)$. Mais h peut être pris aussi grand que l'on veut.

Donc *l'ordre circulaire des points* $M(i)$ *ne dépend que du nombre incommensurable* μ, *et il est le même que celui des quantités* $\mu i - \mathrm{E}(\mu i)$. [$\mathrm{E}(x)$ désignant, suivant la coutume, le plus grand entier contenu dans x.]

Il résulte immédiatement de ce théorème qu'entre deux points quelconques de P il y en a une infinité d'autres; donc, entre deux points quelconques de P, il y aura toujours des points de P'.

Soit N un point quelconque de P'. Dans le voisinage de ce point, il y aura, par définition, une infinité de points de P; entre deux quelconques de ceux-ci, il y aura toujours un point de P'. Donc, dans le voisinage de N, il y a une infinité de points de P', c'est-à-dire que N appartient à P'', ensemble dérivé de P'. On peut donc écrire

$$D(P', P'') = P'.$$

D'autre part, un théorème de la théorie générale des ensembles donne

$$D(P', P'') = P'';$$

d'où

$$P' = P''.$$

Ainsi P′ se confond avec son dérivé ; c'est donc un de ces ensembles que M. Cantor appelle parfaits.

Mais on sait que M. Cantor distingue les ensembles parfaits linéaires en deux classes : ceux qui ne sont condensés dans aucun intervalle et ceux qui sont condensés dans certains intervalles.

Nous pouvons donc faire trois hypothèses dans l'énoncé desquelles nous reprendrons le langage ordinaire.

1° Nous pouvons supposer que tous les points de la circonférence méridienne $\varphi = 0$ appartiennent à P′.

2° Nous pouvons supposer ensuite qu'il y a sur cette circonférence certains arcs dont tous les points appartiennent à P′, sans que, cependant, il en soit de même de tous les points de cette circonférence.

3° Nous pouvons supposer enfin qu'il n'y a sur cette circonférence aucun arc dont tous les points appartiennent à P′.

Je vais commencer par faire voir que la deuxième hypothèse doit être rejetée. Si on l'adoptait, en effet, on pourrait trouver sur la circonférence un arc AB dont tous les points appartiennent à P′; mais tel que, si on le prolonge au delà de A ou au delà de B, tous les points du prolongement n'appartiennent pas à P′.

Soient A_i et B_i les $i^{\text{ièmes}}$ conséquents de A et B; les $i^{\text{ièmes}}$ conséquents des différents points de l'arc AB seront les différents points de l'arc A_iB_i, et ils devront évidemment faire tous partie de P′.

Je dis que les deux arcs AB et A_iB_i ne peuvent avoir aucune partie commune; car, si A et B étaient situés sur l'arc A_iB_i ou si A_i et B_i étaient situés sur l'arc AB, il y aurait un cycle limite, ce que nous ne supposons pas. Si maintenant le point A_i était situé sur l'arc AB et B_i en dehors de cet arc (ou si B_i était situé sur l'arc AB et A_i en dehors de cet arc), tous les points de l'arc BB_i (ou tous ceux de l'arc AA_i) qui forme un prolongement de l'arc AB au delà du point B (ou du point A) appartiendraient à P′, ce qui est contraire à l'hypothèse faite plus haut.

Soit M(0) un point de P situé sur l'arc AB, le point $M(i)$ sera sur l'arc A_iB_i et par conséquent en dehors de AB. Mais, comme le nombre i est quelconque, il n'y aurait sur l'arc AB aucun conséquent ou antécédent de M(0), c'est-à-dire aucun point de P à l'exception de M(0). Mais, pour que tous les points de l'arc AB appartiennent à P′, il faut qu'il y ait sur cet arc une infinité de points de P.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée et il nous reste à examiner la première et la troisième.

La première hypothèse peut certainement être réalisée; car nous avons reconnu qu'elle l'est en effet par les équations

$$\frac{d\omega}{dt} = a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = b,$$

lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est incommensurable.

Je dis d'abord que, si tous les points de la circonférence appartiennent à P', cela sera vrai, quelle que soit la trajectoire à l'aide de laquelle on ait formé les ensembles P et P'. Considérons en effet une autre trajectoire coupant le cercle méridien en un certain nombre de points formant un ensemble Q.

Je dis que le dérivé Q' de Q se composera comme P' de tous les points de la circonférence. En effet soit N(o) un point quelconque de cette circonférence, $N(i)$ son $i^{\text{ième}}$ conséquent, Q l'ensemble des points $N(i)$. Dans le voisinage de N(o) il y a par hypothèse une infinité de points de P, $M(k_1)$, $M(k_2)$, ..., $M(k_n)$.

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression $\mu k_n - E(\mu k_n)$ tend vers une certaine limite h. Cette limite caractérise la position du point N(o) sur la circonférence.

Je veux dire que les trois points $M(j)$, $M(k)$ et N(o) se présenteront dans le même ordre circulaire que les trois nombres, $\mu j - E(\mu j)$, $\mu k - E(\mu k)$ et h, quels que soient les indices j et k.

On verrait aisément que la position de $N(i)$ est caractérisée de la même façon par le nombre $k + \mu i - E(h + \mu i)$, et l'on en conclurait que sur tout arc de la circonférence il y a une infinité de points de Q, ce qui revient à dire que tous les points de la circonférence appartiennent à Q'.

Un point quelconque de la circonférence est caractérisé comme on vient de le voir, par un certain nombre h. Ce nombre h se réduit à $\mu i - E(\mu i)$, lorsqu'il s'agit d'un point $M(i)$ appartenant à P et ayant pour coordonnée ω_i. Il se réduit à zéro pour le point M(o) dont la coordonnée est ω_0. De plus, lorsque ω_i varie de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$, h va constamment en croissant depuis zéro jusqu'à 1. Cela résulte de ce que

les points de la circonférence se succèdent dans le même ordre circulaire que leurs nombres caractéristiques.

Donc h est une fonction croissante de ω, entre les limites ω_0 et $\omega_0 + 2\pi$; on peut donc écrire, en série trigonométrique convergente,

$$2\pi h = \Sigma A_m \cos m\omega + \Sigma B_m \sin m\omega$$

ou bien

$$(2) \qquad 2\pi h - \omega = \Sigma A'_m \cos m\omega + \Sigma B'_m \sin m\omega = \theta(\omega).$$

La fonction $\theta(\omega)$ représentée par la série (2) sera une fonction continue et périodique de ω. La loi de conséquence pourra alors s'écrire

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu.$$

Soit un point N(o) du cercle méridien ayant pour nombre caractéristique h; construisons la trajectoire qui passe par N(o) et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau en N(1) le cercle méridien. Si nous attachons à chacun des points de cet arc de trajectoire N(o), N(1) [à l'exception du point N(1)], le nombre caractéristique h, tous les points du tore auront un nombre caractéristique et un seul. L'expression

$$2\pi h - \omega + \mu\varphi$$

sera une fonction continue et périodique de ω et de φ, exprimable par une série trigonométrique de la forme suivante :

$$(3) \qquad H(\omega, \varphi) = \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \lambda_{mn}).$$

L'intégrale générale des équations proposées s'écrira alors

$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \text{const.}$$

On est donc certain d'avance que cette intégrale générale peut s'exprimer à l'aide d'une série trigonométrique, mais nous n'avons aucune méthode pour calculer les coefficients de cette série.

Dans le cas qui nous occupe, on a évidemment

$$D(P, P') = P$$

pour toutes les trajectoires et l'on ne peut tracer sur le tore de région si petite qu'elle ne soit traversée une infinité de fois par toutes les trajectoires.

Venons maintenant à la troisième hypothèse, ce qui revient à supposer, comme on le verra, que $D(P, P') = P$ pour certaines trajectoires, et que $D(P, P') = 0$ pour d'autres.

Imaginons donc que P' forme un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle ou, pour parler le langage ordinaire, que l'on ne puisse trouver sur la circonférence aucun arc dont tous les points appartiennent à P'. Comme P' est un ensemble parfait, on pourra certainement trouver sur la circonférence un arc $A(0)B(0)$ dont les extrémités appartiennent à P', et dont aucun autre point n'appartient à P' (*cf.* Cantor, *Acta mathematica*, t. IV, fasc. 4).

Il arrivera alors que tous les arcs $A(i)B(i)$ jouiront de la même propriété; d'où il résultera que deux arcs $A(i)B(i)$ *et* $A(k)B(k)$ n'auront aucune partie commune.

Cantor a démontré que, si l'on a sur une circonférence, par exemple, un ensemble parfait de points qui n'est condensé dans aucun intervalle (*loc. cit.*), les points de la circonférence se partageront en trois catégories :

1° Les points de certains arcs dont aucun point n'appartient à l'ensemble ;

2° Les extrémités de ces arcs qui appartiennent évidemment à l'ensemble;

3° Enfin les points de l'ensemble qui ne sont pas les extrémités de pareils arcs.

Dans le cas qui nous occupe, les arcs dont les points sont en dehors de l'ensemble sont les arcs $A(i)B(i)$, les extrémités de ces arcs seront les points $A(i)$ et $B(i)$ eux-mêmes ; enfin les autres points de l'ensemble P' s'obtiendront en cherchant les points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points $A(i)$ et $B(i)$.

Il y aura donc aussi trois espèces de trajectoires :

1° Je citerai en premier lieu les deux trajectoires qui passent, l'une par le point $A(o)$, l'autre par $B(o)$ et que j'appellerai les deux trajectoires A et B. Pour ces deux trajectoires, on a évidemment

$$D(P, P') = P.$$

2° Viennent ensuite les trajectoires qui rencontrent un des arcs $A(i)B(i)$ et qui par conséquent les rencontrent tous. Si le point $C(o)$ d'une de ces trajectoires est sur l'arc $A(o)B(o)$, son $i^{\text{ième}}$ conséquent $C(i)$ sera sur l'arc $A(i)B(i)$. Dans le voisinage d'un point quelconque de P', il y a une infinité de points $A(i)$ et $B(i)$, il y aura donc aussi une infinité de points $C(i)$. Si donc Q désigne l'ensemble des points $C(i)$ et Q' son dérivé, on aura

$$Q' = P'.$$

Il est clair d'ailleurs que

$$D(Q, Q') = o.$$

3° Il y a enfin des trajectoires qui passent par les points de la troisième catégorie et qui, par conséquent, ne rencontrent aucun des arcs $A(i)B(i)$. Pour ces trajectoires, l'ensemble P' est encore le même et l'on a d'ailleurs

$$D(P, P') = P.$$

Ainsi l'ensemble P' est le même pour toutes les trajectoires, et l'on a

$$D(P, P') = P \quad \text{ou} \quad o,$$

suivant la trajectoire considérée.

Les arcs $A(i)B(i)$ se succèdent dans le même ordre circulaire que les nombres $\mu i - E(\mu i)$.

Les formules

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu,$$

$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \text{const.},$$

où $\theta(\omega)$ et $\Pi(\omega, \varphi)$ désignent des séries trigonométriques représentant des fonctions continues et périodiques, subsistent encore ici, mais elles n'ont plus la même portée. En effet, la fonction $\omega + \theta(\omega)$ reste constante tout le long de l'arc $A(i)B(i)$, et l'on trouverait de même sur le tore des régions où la fonction $\Pi(\omega, \varphi) + \mu\varphi - \omega$ conserve une valeur constante.

Il resterait à voir si cette troisième hypothèse, dont nous venons de développer quelques conséquences, peut se réaliser, ou, en d'autres termes, si elle est compatible avec les trois principes que nous avons énoncés plus haut au sujet de la loi de conséquence,

$$\omega_1 = \psi(\omega_0)$$

et avec la forme particulière des équations différentielles considérées.

Je puis affirmer qu'elle est compatible avec les deux premiers principes, en vertu desquels la fonction ψ est continue et croissante.

Est-elle également compatible avec le troisième principe, en vertu duquel la fonction ψ est holomorphe? C'est ce qui resterait à examiner.

Il faudrait, ou bien trouver un exemple où la troisième hypothèse soit réalisée, ce que je n'ai pu faire jusqu'ici, ou bien en démontrer l'impossibilité dans tous les cas.

Je n'ai pu non plus arriver à ce résultat, et je crois, d'ailleurs, que l'hypothèse est effectivement réalisable, mais il y a des cas particuliers où l'on peut démontrer qu'il n'en est pas ainsi et qu'on doit s'en tenir à la première hypothèse.

Soient $C(0)$ un point de la circonférence méridienne, $C(1), C(2), \ldots, C(i)$ ses $i^{\text{ièmes}}$ premiers conséquents; on s'arrêtera lorsqu'on arrivera à un $(i+1)^{\text{ième}}$ conséquent situé sur l'arc $A(0)A(1)$. Soient maintenant M_0 et m_0, M_1 et $m_1, \ldots, M_{i-1}$ et m_{i-1}, M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que peut prendre la dérivée $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$, respectivement sur l'arc $C(0)(1)$, sur l'arc $C(1)C(2), \ldots$, sur l'arc $C(i-1)C(i)$ et enfin sur l'arc $C(i)C(0)$. Si

$$M_0 M_1 M_2 \ldots M_{i-1} M_i < 1 \quad \text{et} \quad M_0 M_1 M_2 \ldots M_{i-1} < 1$$

ou bien encore si

$$m_0 m_1 m_2 \ldots m_{i-1} m_i > 1 \quad \text{et} \quad m_0 m_1 m_2 \ldots m_{i-1} > 1,$$

on est certain que la troisième hypothèse doit être rejetée.

Par le même procédé on peut trouver, dans tous les cas, la limite supérieure de l'un quelconque des arcs $A(i)B(i)$, définis plus haut. Si M est le maximum et m le minimum de la dérivée $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$, tous les arcs $A(i)B(i)$ sont plus petits que

$$\frac{2\pi}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{M}} + \dfrac{1}{1-m}}.$$

On peut faire encore une remarque; reprenons le point $A(o)$ et la trajectoire A qui passe par ce point. Soient $C(o)$ et $D(o)$ deux points très voisins de $A(o)$, mais situés l'un à droite et l'autre à gauche de ce point; soient C et D les trajectoires qui passent par ces points. Nous pouvons imaginer trois points mobiles a, c, d décrivant ces trois trajectoires simultanément, de façon à se trouver toujours tous les trois sur le même cercle méridien. Lorsque le temps croîtra, il arrivera alors que la distance ac tendra vers zéro, et que la distance ad ne tendra pas vers zéro, et cela, quelque voisins que soient de $A(o)$ les points $C(o)$ et $D(o)$. Dans la première hypothèse, au contraire, il est impossible que la distance de deux points mobiles a et c décrivant deux trajectoires différentes tende vers zéro. Je ne doute pas qu'on ne puisse se servir utilement de cette remarque, bien que je n'en aie pu moi-même tirer aucun parti.

Toutes ces considérations n'ont pu encore me conduire à la solution de la question principale et ne m'ont pas permis de démontrer rigoureusement que la troisième hypothèse peut effectivement être réalisée.

Bien d'autres questions se posent d'ailleurs, qui sont intimement liées avec la précédente. C'est ainsi qu'on peut se demander comment varie le nombre caractéristique μ, défini plus haut, quand on fait varier les coefficients des équations différentielles. On peut démontrer que cette variation est continue. Mais nous pouvons supposer que, pour certaines valeurs de ces coefficients, il y ait un cycle limite; le nombre μ peut

alors être regardé comme commensurable. Si, pour d'autres valeurs des coefficients, le nombre μ est incommensurable (ou commensurable sans qu'il y ait de cycle limite) et si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue et de façon à passer par les valeurs qui donnent un cycle limite, le nombre μ présentera toujours, pour ces valeurs, soit un maximum, soit un minimum. Il y a là certainement le point de départ d'une série d'études qui seront sans doute fécondes, et que je crois devoir signaler aux travailleurs.

J'espère, d'ailleurs, pouvoir, dans un Chapitre ultérieur de ce Mémoire, donner sur ces questions des résultats plus complets. J'y reviendrai, en effet, après avoir posé, dans la suite de ce travail, une série de problèmes, fort analogues au précédent, mais plus délicats encore, et qui sont liés intimement avec l'importante question de la convergence des séries trigonométriques et, en particulier, des séries employées en Mécanique céleste.

Avant de terminer, je voudrais montrer, en quelques mots, en quoi consiste le lien que je viens de signaler entre le problème qui vient de nous occuper et les méthodes de la Mécanique céleste.

Nous avons vu que l'intégrale générale des équations proposées pouvait se mettre sous la forme

$$\omega - \mu\varphi - \mathrm{H}(\omega, \varphi) = \text{const.},$$

H étant une série trigonométrique. Supposons que notre équation différentielle s'écrive

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \mu_0 + \alpha \mathrm{F},$$

μ_0 étant une constante, α un coefficient très petit et F un polynôme en $\cos\omega$ $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, ou plutôt encore une série trigonométrique

$$\mathrm{F} = \Sigma \mathrm{A}_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \lambda_{mn}).$$

Il viendra

$$(\mu_0 + \alpha \mathrm{F})\left(1 - \frac{d\mathrm{H}}{d\omega}\right) = \mu + \frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}.$$

Supposons que μ et H puissent se développer suivant les puissances de

α, de telle sorte que

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \alpha + \mu_2 \alpha^2 + \ldots,$$
$$H = H_1 \alpha + H_2 \alpha^2 + H_3 \alpha^3 + \ldots.$$

Il viendra

$$\mu_0 \frac{dH_1}{d\omega} + \frac{dH_1}{d\varphi} = F - \mu_1,$$
$$\mu_0 \frac{dH_2}{d\omega} + \frac{dH_2}{d\varphi} = \frac{dH_1}{d\omega} F - \mu_2,$$
$$\mu_0 \frac{dH_3}{d\omega} + \frac{dH_3}{d\varphi} = \frac{dH_2}{d\omega} F - \mu_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On choisira les constantes μ_1, μ_2, μ_3, ... de façon que les seconds membres des égalités précédentes soient des séries trigonométriques débarrassées de leur terme tout connu. Il sera alors possible (si μ_0 est incommensurable) de trouver des séries trigonométriques H_1, H_2, ... satisfaisant *formellement* aux équations précédentes.

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie de ce procédé d'approximation avec la méthode de M. Lindstedt en Mécanique céleste, et de ne pas comprendre que la question de la convergence du procédé que je viens d'exposer est intimement liée à celle de la convergence des séries employées par le savant astronome de Dorpat. Mais le problème que nous traitons ici est évidemment beaucoup plus simple que les questions analogues de la Mécanique céleste, et, si les difficultés sont de même nature, elles sont moins nombreuses et sans doute plus aisées à surmonter. C'est cette considération qui m'a engagé à insister sur la question qui a fait l'objet de ce Chapitre, et qui m'y fera sans doute revenir à mesure que je trouverai des résultats nouveaux.

Dans la quatrième Partie de ce travail, j'aborderai l'étude des équations différentielles du second ordre. J'abandonne donc momentanément les équations du premier ordre, en me réservant de revenir dans la suite sur les problèmes relatifs à ces équations et restés encore sans solution, en les rapprochant des problèmes analogues qui se poseront au sujet des équations d'ordre supérieur.

Paris, 15 janvier 1885.

Sur l'inversion des intégrales abéliennes;

Par M. P. APPELL.

1. Dans leur *Theorie der Abelschen Functionen,* MM. Clebsch et Gordan généralisent le problème de l'inversion, en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent les intégrales abéliennes de première espèce et des intégrales normales de troisième espèce; ils indiquent une méthode pour passer, par continuité, de ce cas à celui où certaines intégrales de troisième espèce sont remplacées par des intégrales normales de seconde espèce. Des exemples de l'intégration d'un pareil système avaient été donnés auparavant par Rosenhain (*Mémoires des Savants étrangers,* 1851) et par Clebsch, à l'occasion de ses recherches sur les courbes de genre 0 et 1 ([1]) (*Journal de Crelle,* t. 64). Enfin M. Elliot (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. XI), en étendant la méthode de Riemann, telle qu'elle a été exposée par M. Briot, a intégré un système d'équations où figurent les intégrales de première espèce avec des intégrales *normales* de *deuxième* et *troisième* espèce. Il reste donc à étudier un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent non seulement des intégrales *normales* de seconde espèce, mais encore les dérivées d'ordre quelconque de ces intégrales par rapport au paramètre. C'est l'intégration d'un tel système qui fait

([1]) *Voir* les *Leçons de Géométrie,* par A. Clebsch, recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist, t. III.

l'objet de ce Mémoire; elle permet de démontrer un théorème général dont voici l'énoncé :

I. *Soient x et y deux variables imaginaires liées par une relation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions rationnelles de x et y*

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y)$$

possédant la propriété suivante : le système d'équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1)\, dx_1 + \varphi_1(x_2, y_2)\, dx_2 + \ldots + \varphi_1(x_n, y_n)\, dx_n = du_1, \\ \varphi_2(x_1, y_1)\, dx_1 + \varphi_2(x_2, y_2)\, dx_2 + \ldots + \varphi_2(x_n, y_n)\, dx_n = du_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, y_1)\, dx_1 + \varphi_n(x_2, y_2)\, dx_2 + \ldots + \varphi_n(x_n, y_n)\, dx_n = du_n \end{cases}$$

définit les n points analytiques

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n)$$

en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que les n valeurs

$$\mathrm{R}(x_1, y_1), \quad \mathrm{R}(x_2, y_2), \quad \ldots, \quad \mathrm{R}(x_n, y_n)$$

que prend une fonction rationnelle quelconque $\mathrm{R}(x, y)$ en ces points sont racines d'une équation ALGÉBRIQUE *à coefficients* UNIFORMES *en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Nous examinerons d'abord le cas le plus simple, celui où la relation algébrique qui lie les deux variables x et y est de genre 0 ou 1. La méthode, que nous emploierons pour le cas général où le genre est un nombre p quelconque, sera la même que pour ces deux cas simples. Cette méthode est différente de celle que M. Elliot a suivie dans les Mémoires précédemment cités; elle est, avec des modifications qui seront indiquées plus loin, l'extension de la méthode employée par Clebsch (*loc. cit.*).

2. Occupons-nous d'abord du cas où le genre p de la relation algébrique

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

qui lie x à y est égal à *zéro*. La courbe, représentée par l'équation (2), est alors unicursale; les coordonnées x et y d'un de ses points peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t qui est luimême une fonction rationnelle de x et y, et les intégrales abéliennes correspondantes deviennent des intégrales de fonctions rationnelles de t. Dans ce cas, le théorème général I, énoncé au nº **1**, se réduit à la proposition élémentaire suivante :

II. *Soit* $R_1(t)$ *une fonction rationnelle de* t; *on peut toujours lui associer* $(n-1)$ *autres fonctions rationnelles*

$$R_2(t),\ R_3(t),\ \ldots,\ R_n(t),$$

de telle façon que les n *fonctions* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *des* n *variables* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *définies par les équations différentielles*

$$\left\{\begin{array}{l} R_1(t_1)\,dt_1 + R_1(t_2)\,dt_2 + \ldots + R_1(t_n)\,dt_n = du_1, \\ R_2(t_1)\,dt_1 + R_2(t_2)\,dt_2 + \ldots + R_2(t_n)\,dt_n = du_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_n(t_1)\,dt_1 + R_n(t_2)\,dt_2 + \ldots + R_n(t_n)\,dt_n = du_n \end{array}\right. \tag{3}$$

soient racines d'une équation algébrique à coefficients UNIFORMES *en* u_1, $u_2, \ldots, u_n$.

Soit, par exemple,

$$R_1(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{t^3 - t + 1}{t^2(t-1)^2}; \tag{4}$$

il suffira d'associer à $R_1(t)$ les deux fonctions rationnelles

$$R_2(t) = \frac{1}{t^2}, \quad R_3(t) = \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Les équations différentielles, telles que (3), seront alors

$$(3')\quad \begin{cases} R_1(t_1)\,dt_1 + R_1(t_2)\,dt_2 + R_1(t_3)\,dt_3 = du_1, \\ R_2(t_1)\,dt_1 + R_2(t_2)\,dt_2 + R_2(t_3)\,dt_3 = du_2, \\ R_3(t_1)\,dt_1 + R_3(t_2)\,dt_2 + R_3(t_3)\,dt_3 = du_3 \end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{t_1} + \dfrac{dt_2}{t_2} + \dfrac{dt_3}{t_3} = d(u_1 - u_2 - u_3), \\ \dfrac{dt_1}{t_1^2} + \dfrac{dt_2}{t_2^2} + \dfrac{dt_3}{t_3^2} = du_2, \\ \dfrac{dt_1}{(t_1 - 1)^2} + \dfrac{dt_2}{(t_2 - 1)^2} + \dfrac{dt_3}{(t_3 - 1)^2} = du_3, \end{cases}$$

en retranchant de la première la somme des deux dernières et remarquant que

$$R_1(t) - R_2(t) - R_3(t) = \frac{1}{t}.$$

Si l'on intègre et si l'on pose

$$u_1 - u_2 - u_3 + C_1 = v_1, \quad C_2 - u_2 = v_2, \quad C_3 - u_3 = v_3,$$

C_1, C_2, C_3 désignant les constantes d'intégration, il vient

$$(6)\quad t_1 t_2 t_3 = e^{v_1}, \quad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = v_2, \quad \frac{1}{t_1 - 1} + \frac{1}{t_2 - 1} + \frac{1}{t_3 - 1} = v_3;$$

d'où l'on tire facilement les fonctions symétriques élémentaires

$$t_1 + t_2 + t_3, \quad t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2, \quad t_1 t_2 t_3$$

en fonction uniforme de v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire de u_1, u_2, u_3. Mais, pour suivre une méthode qui s'applique à tous les cas, formons directement le polynôme du troisième degré

$$(7)\quad \Phi(t) = A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = A_0(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3),$$

qui admet pour racines t_1, t_2, t_3. D'après l'identité

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\left(\frac{1}{t-t_1} + \frac{1}{t-t_2} + \frac{1}{t-t_3}\right),$$

les équations (6) s'écrivent

$$(8)\quad \Phi(0) + A_0 e^{v_1} = 0, \quad \Phi'(0) + v_2\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(1) + v_3\Phi(1) = 0.$$

On a ainsi trois équations homogènes et linéaires par rapport à A_0, A_1, A_2, A_3; l'élimination de ces coefficients entre ces équations (8) et l'équation

$$A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = 0$$

fournira, sous forme de déterminant, l'équation

$$\begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ e^{v_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & v_2 \\ 3+v_3 & 2+v_3 & 1+v_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui admet pour racines t_1, t_2, t_3.

Je terminerai par une dernière remarque sur l'exemple qui nous occupe. Il est évident que l'on peut, sans changer les conclusions relatives à la nature des intégrales des équations (3'), remplacer l'une quelconque des fonctions $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ par une combinaison linéaire homogène à coefficients constants de toutes ces fonctions. Voici alors comment on pourra, sans avoir recours à la décomposition en fractions simples, déterminer les deux fonctions qu'il faut, dans les équations (3'), associer à la fonction $R_1(t)$ donnée par l'équation (4). Cette fonction $R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t devenant nulle à l'infini, admettant pour dénominateur

$$t^2(t-1)^2,$$

avec cette circonstance particulière que le résidu de $R_1(t)$ relatif au pôle $t=1$ est égal à zéro. Formons la fonction rationnelle la plus générale qui remplisse toutes ces conditions; un calcul bien facile montre

qu'elle pourra s'écrire

$$\frac{A(t^3-t+1)+B(t-1)^2+Ct^2}{t^2(t-1)^2}$$

avec trois coefficients arbitraires A, B, C, ou encore

$$A R_1(t) + B R_2(t) + C R_3(t);$$

on voit que les fonctions rationnelles qui multiplient A, B, C sont précisément celles qui entrent dans les équations (3').

5. La même méthode d'intégration s'applique au cas général où l'on prend n équations différentielles de la forme suivante, dont un cas particulier est indiqué par Clebsch [1] :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &d\log\frac{t_1-a_i}{t_1-a'_i}+d\log\frac{t_2-a_i}{t_2-a'_i}+\ldots+d\log\frac{t_n-a_i}{t_n-a'_i}=du_i \qquad (i=1,2,\ldots,q),\\ &\left.\begin{aligned} &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^2}+\frac{dt_2}{(t_2-b_j)^2}+\ldots+\frac{dt_n}{(t_n-b_j)^2}=du_{j,1}\\ &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^3}+\frac{dt_2}{(t_2-b_j)^3}+\ldots+\frac{dt_n}{(t_n-b_j)^3}=du_{j,2}\\ &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^{\alpha_j+1}}+\frac{dt_2}{(t_2-b_j)^{\alpha_j+1}}+\ldots+\frac{dt_n}{(t_n-b_j)^{\alpha_j+1}}=du_{j,\alpha_j} \end{aligned}\right\}\ (j=1,2,\ldots,r), \end{aligned}\right.$$

où

$$n=q+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r.$$

Toutes les quantités a_i sont différentes les unes des autres et différentes des a'_i; mais un certain nombre de ces dernières $a'_1, \ldots, a'_q$ peuvent être égales entre elles. Les quantités b_j sont différentes les unes des autres, mais peuvent être égales aux a_i, a'_i.

En effectuant l'intégration, désignant respectivement par

$$C_i,\ C_{j,1},\ C_{j,2},\ \ldots,\ C_{j,\alpha_j}$$

---

(1) *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 58.

les constantes d'intégration, et posant

$$v_i = C_i + u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$
$$v_{j,k} = C_{j,k} - k u_{j,k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

on a les équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(t_1 - a_i)(t_2 - a_i)\ldots(t_n - a_i)}{(t_1 - a'_i)(t_2 - a'_i)\ldots(t_n - a'_i)} = e^{v_i} & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{t_1 - b_j} + \dfrac{1}{t_2 - b_j} + \ldots + \dfrac{1}{t_n - b_j} = v_{j,1} \\ \dfrac{1}{(t_1 - b_j)^2} + \dfrac{1}{(t_2 - b_j)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(t_n - b_j)^2} = v_{j,2} \\ \dfrac{1}{(t_1 - b_j)^{\alpha_j}} + \dfrac{1}{(t_2 - b_j)^{\alpha_j}} + \ldots + \dfrac{1}{(t_n - b_j)^{\alpha_j}} = v_{j\,\alpha_j} \end{array}\right\} & (j = 1, 2, \ldots, r). \end{array} \right.$$

On peut alors former, de la façon suivante, un polynôme de degré n

$$\Phi(t) = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n = A_0(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_n)$$

qui admet pour racines $t_1, t_2, \ldots, t_n$. On a identiquement

$$\Phi'(t) = \Phi(t) \sum \frac{1}{t - t_1},$$

en employant le signe Σ pour désigner une sommation étendue aux n quantités $t_1, t_2, \ldots, t_n$. On en conclut, par la différentiation,

$$\Phi''(t) = \Phi'(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - \Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2},$$
$$\Phi'''(t) = \Phi''(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - 2\Phi'(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2} + 2\Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi^{(k+1)}(t) = \Phi^{(k)}(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - k\,\Phi^{(k-1)}(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2} + \ldots + (-1)^k\, 1.2\ldots k\, \Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^{k+1}}.$$

Ceci posé, les équations (10) fournissent n équations linéaires et homogènes entre les coefficients

$$A_0, \; A_1, \; \ldots, \; A_n$$

du polynôme $\Phi(t)$. En effet, les q premières de ces équations (10) peuvent s'écrire

$$(11) \qquad \Phi(a_i) - \Phi(a'_i)e^{v_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

ce qui sont déjà q équations entre les coefficients en question. Les autres relations (10) pourront s'écrire, en vertu des identités précédentes,

$$(11') \quad \begin{cases} \Phi'(b_j) + v_{j,1}\Phi(b_j) = 0, \\ \Phi''(b_j) + v_{j,1}\Phi'(b_j) + v_{j,2}\Phi(b_j) = 0, \\ \Phi'''(b_j) + v_{j,1}\Phi''(b_j) + 2v_{j,2}\Phi'(b_j) + 2v_{j,3}\Phi(b_j) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi^{(\alpha_j)}(b_j) + v_{j,1}\Phi^{(\alpha_j-1)}(b_j) + \ldots + 1.2\ldots\alpha_j v_{j,\alpha_j}\Phi(b_j) = 0, \end{cases}$$

où

$$j = 1.2\ldots r;$$

on a ainsi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r,$$

équations linéaires nouvelles entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$ qui, avec les équations (11), forment le système annoncé de n équations. En adjoignant à ces équations (11) et (11') la suivante

$$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

on aura $(n+1)$ équations linéaires homogènes entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$; le déterminant des coefficients de ces quantités doit être nul. En égalant ce déterminant à zéro, on obtient une équation de degré n en t, ayant pour racines les fonctions cherchées $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et pour coefficients des fonctions uniformes des quantités v_i et $v_{j,k}$, c'est-à-dire des quantités u_i et $u_{j,k}$. Ces fonctions uniformes admettent q groupes de périodes conjuguées.

4. On conclut facilement de ce qui précède le théorème II relatif à une fraction rationnelle quelconque $R_1(t)$.

En effet, nous pouvons toujours supposer que, dans l'intégrale

$$\int R_1(t)\,dt,$$

$R_1(t)$ soit infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{t^2}$ pour t infini; car, s'il en était autrement, en désignant par τ un nombre quelconque qui ne soit pas un pôle de $R_1(t)$, il suffirait de faire le changement de variable

$$t = \tau + \frac{1}{t'}$$

pour que, dans la nouvelle intégrale

$$-\int R_1\left(\tau + \frac{1}{t'}\right)\frac{dt'}{t'^2},$$

le coefficient de dt' soit de l'ordre de $\frac{1}{t'^2}$ pour t' infini. Supposons donc que cette condition soit réalisée pour $R_1(t)$; alors la somme des résidus de $R_1(t)$ est nulle. Si donc nous décomposons $R_1(t)$ en fractions simples, nous obtiendrons une décomposition de la forme

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} R_1(t) = {} & \sum_{i=1}^{=q} \mathcal{A}_i\left(\frac{1}{t-a_i} - \frac{1}{t-a'_i}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{j=r}\left[\frac{\mathcal{B}_{j,1}}{(t-b_j)^2} + \frac{\mathcal{B}_{j,2}}{(t-b_j)^3} + \ldots + \frac{\mathcal{B}_{j,\alpha_j}}{(t-b_j)^{\alpha_j+1}}\right], \end{aligned} \right.$$

où les quantités a_i, a'_i, b_j remplissent les conditions indiquées à la page 250, à propos des équations (9); certains des coefficients $\mathcal{B}_{j,k}$ peuvent être nuls, mais les derniers de chaque groupe $\mathcal{B}_{1,\alpha_1}, \mathcal{B}_{2,\alpha_2}, \ldots, \mathcal{B}_{r,\alpha_r}$ sont différents de zéro. Or il est évident que l'on peut, sans changer la nature des intégrales de l'équation (9), remplacer l'une quelconque d'entre elles par une combinaison linéaire à coefficients constants de cette équation avec les autres. Nous pourrons, par exemple, en conservant toutes les autres équations (9), remplacer la première de ces équations par celle-ci

$$R_1(t_1)\,dt_1 + R_1(t_2)\,dt_2 + \ldots + R_1(t_n)\,dt_n = dU_1,$$

où $R_1(t)$ désigne la fonction rationnelle (12), et où l'on pose

$$U_1 = \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=r} (\mathcal{B}_{j,1} u_{j,1} + \mathcal{B}_{j,2} u_{j,2} + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} u_{j,\alpha_j}).$$

On obtient ainsi un système d'équations de la forme (3), dont les intégrales sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ou en $U_1, u_2, u_3, \ldots$; ce qui démontre le théorème II (page 247).

D'après cela, les fonctions $R_2(t), R_3(t), \ldots, R_n(t)$ que l'on associe à la fonction donnée $R_1(t)$ pour pouvoir appliquer ce théorème II sont les coefficients de $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_q$ et des quantités $\mathcal{B}_{j,1}, \mathcal{B}_{j,2}, \ldots, \mathcal{B}_{j,\alpha}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ dans la formule de décomposition (12); le nombre $(n-1)$ de ces fonctions est donc

$$n - 1 = q - 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r.$$

Ce nombre $(n-1)$ ne constitue évidemment qu'un minimum; en effet on pourra, une fois formé un système d'équations différentielles, tel que (3), possédant les propriétés indiquées, en déduire un autre système contenant une fonction inconnue de plus t_{n+1} et une expression rationnelle de plus $R_{n+1}(t)$; il suffira pour cela de prendre, par exemple,

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{t-c} - \frac{1}{t-d},$$

où c désigne une constante qui n'est un pôle d'aucune des autres fractions rationnelles $R_1(t), R_2(t), \ldots, R_n(t)$.

Dans chaque cas particulier, on verra immédiatement quelle est la valeur du nombre q des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_q$ qui figurent dans la formule de décomposition (12). Par exemple, si

$$R_1(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} - \frac{3}{t+3},$$

il faudra écrire

$$R_1(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right) + \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right) + \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right),$$

et q sera égal à 3; les fonctions à associer à $R_1(t)$ seront au nombre de deux :

$$R_2(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}, \quad R_3(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}.$$

Si

$$R_1(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3},$$

q sera égal à 2, et il suffira d'associer à $R_1(t)$ la seule fonction

$$R_1(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}.$$

5. Considérons maintenant le cas où le genre p de la relation algébrique (2) est égal à l'*unité*. On pourra alors exprimer les coordonnées x et y d'un point de la courbe représentée par l'équation (2) en fonction doublement périodique d'un paramètre t, de telle manière qu'à chaque point de la courbe corresponde une seule valeur de t à des multiples près des périodes. Les périodes étant désignées par $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$, les expressions de x et y seront des *fonctions rationnelles* de $\operatorname{sn}^2 t$ et $D_t \operatorname{sn}^2 t$, et inversement ces deux quantités

$$\operatorname{sn}^2 t, \quad D_t \operatorname{sn}^2 t$$

seront des *fonctions rationnelles* de x et y. Dans ce cas, le théorème général I peut s'énoncer comme il suit :

III. *Étant donnée une fonction elliptique* $f_1(t)$ *aux périodes* $2K$ *et* $2\sqrt{-1}K'$, *on peut toujours lui associer un certain nombre* $(n-1)$ *d'autres fonctions de même nature* $f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)$, *de telle façon qu'en posant les équations différentielles*

$$(13) \qquad f_i(t_1)\,dt_1 + f_i(t_2)\,dt_2 + \ldots + f_i(t_n)\,dt_n = du_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les valeurs que prend une fonction elliptique quelconque aux mêmes périodes pour $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$ *soient racines d'une équation algébrique à coefficients* UNIFORMES *en* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

6. Pour démontrer ce théorème, faisons, avec M. Hermite,

$$Z(t) = \frac{d \log H(t)}{dt},$$

et désignons par $Z'(t)$, $Z''(t)$, ... les dérivées successives de $Z(t)$. Nous allons d'abord effectuer l'intégration du système suivant d'équations dont un cas particulier a été traité par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 233) :

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&dt_1 + dt_2 + \ldots + dt_n = du,\\
&d\log\frac{H(t_1-a_i)}{H(t_1-a'_i)} + d\log\frac{H(t_2-a_i)}{H(t_2-a'_i)} + \ldots + d\log\frac{H(t_n-a_i)}{H(t_n-a'_i)} = du_i \qquad (i=1, 2, \ldots, q),\\
&\left.\begin{aligned}
&Z'(t_1-b_j)\,dt_1 + Z'(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z'(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j,1}\\
&Z''(t_1-b_j)\,dt_1 + Z''(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z''(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j,2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Z^{(\alpha_j)}(t_1-b_j)\,dt_1 + Z^{(\alpha_j)}(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z^{(\alpha_j)}(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j,\alpha_j}
\end{aligned}\right\} (j=1, 2, \ldots, r).
\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont analogues aux équations (9); leur nombre

$$1 + q + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$$

est supposé égal à n; les constantes a_i, a'_i, b_j sont assujetties aux mêmes conditions que dans les équations (9). Effectuant l'intégration et supposant les constantes d'intégration ajoutées à u, u_i, $u_{j,k}$, nous obtenons les équations

$$(15)\left\{\begin{aligned}
&t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u,\\
&\frac{H(t_1-a_i)\,H(t_2-a_i)\ldots H(t_n-a_i)}{H(t_1-a'_i)\,H(t_2-a'_i)\ldots H(t_n-a'_i)} = e^{u_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, q),\\
&\left.\begin{aligned}
&Z(t_1-b_j) + Z(t_2-b_j) + \ldots + Z(t_n-b_j) = u_{j,1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z^{(\alpha_j-1)}(t_1-b_j) + Z^{(\alpha_j-1)}(t_2-b_j) + \ldots + Z^{(\alpha_j-1)}(t_n-b_j) = u_{j,\alpha_j}
\end{aligned}\right\} (j=1, 2, \ldots, r).
\end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer que les valeurs que prend une fonction elliptique quelconque de périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}\,K'$ aux points t_1, t_2, ..., t_n

sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Pour cela, nous formerons un polynôme en $\operatorname{sn}^2 t$ et $D_t \operatorname{sn}^2 t$ qui s'annule pour $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$, et dont les coefficients sont uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$ Ce polynôme pourrait être obtenu par la méthode employée par Clebsch (*loc. cit.*); j'emploierai une méthode un peu différente qui s'étendra plus facilement aux intégrales abéliennes.

Nous pouvons toujours supposer qu'aucune des constantes a_i, a'_i, b_j ne soit de la forme

$$(16) \qquad 2mK + (2m'+1)\sqrt{-1}\,K' \qquad (m, m' \text{ entiers}),$$

car, s'il en était ainsi, il suffirait de changer $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en $t_1+\lambda$, $t_2+\lambda$, $\ldots$, $t_n+\lambda$ et a_i, a'_i, b_j en $a_i+\lambda$, $a'_i+\lambda$, $\ldots$, $b_j+\lambda$, la constante λ étant choisie de telle manière qu'aucune des quantités $a_i+\lambda$, $a'_i+\lambda$, $b_j+\lambda$ ne soit de la forme (16).

Cela posé, considérons la fonction de t

$$(17) \quad \begin{cases} \Phi(t) = C e^{-(n+1)\frac{\pi t\sqrt{-1}}{2K}} \\ \qquad \times \dfrac{H(t-t_1)H(t-t_2)\ldots H(t-t_n)H\left[t+u-(n+1)\sqrt{-1}\,K'\right]}{\Theta^{n+1}(t)}; \end{cases}$$

en vertu de la première des équations (15),

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u,$$

cette fonction $\Phi(t)$ admet, par rapport à t, les deux périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}\,K'$, ainsi qu'il résulte immédiatement des propriétés fondamentales des fonctions H et Θ. De plus, cette fonction (17) s'annule aux points

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ (n+1)\sqrt{-1}\,K' - u$$

et aux homologues de ces points.

D'après un théorème de M. Hermite (Note à la troisième édition de Lacroix, p. 427), cette fonction $\Phi(t)$ est de la forme

$$(17') \qquad \Phi(t) = F(z) + z' F_1(z),$$

où

$$(18) \qquad z = \mathrm{sn}^2 t, \quad z' = D_t \,\mathrm{sn}^2 t = 2 \,\mathrm{sn}\, t \,\mathrm{cn}\, t \,\mathrm{dn}\, t,$$

F et F_1 étant des polynômes de degrés respectifs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} - 1$ si n est *pair*, $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-3}{2}$ si n est *impair*. Dans le premier cas (n pair), on aura

$$F(z) = A_0 z^{\frac{n}{2}} + A_1 z^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{n}{2}}, \quad F_1(z) = A_{\frac{n}{2}+1} z^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + A_n,$$

et dans la deuxième (n impair),

$$F(z) = A_0 z^{\frac{n+1}{2}} + A_1 z^{\frac{n+1}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{n+1}{2}}, \quad F_1(z) = A_{\frac{n+1}{2}+1} z^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + A_n;$$

donc, dans les deux cas, l'expression (17') de la fonction $\Phi(t)$ contient d'une façon linéaire et homogène $(n+1)$ coefficients

$$(19) \qquad A_0, \; A_1, \; \ldots, \; A_n.$$

Ces coefficients sont des fonctions uniformes des quantités $u, u_i, u_{j,k}$ comme nous allons le montrer. Écrivons d'abord que la fonction (17') s'annule pour $t = (n+1)\sqrt{-1}\,K' - u$; nous aurons l'équation

$$(20) \qquad F(\zeta) + \zeta' F_1(\zeta) = 0,$$

en désignant par ζ et ζ' ce que deviennent z et z' quand on y remplace t par $(n+1)\sqrt{-1}\,K' - u$.

Lorsque les coefficients (19) vérifient cette équation linéaire (20), la fonction (17') admet, dans un parallélogramme des périodes, le zéro $(n+1)\sqrt{-1}\,K' - u$ et n autres zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifiant la relation

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u,$$

d'après un théorème de Liouville, qui est un cas particulier du théorème d'Abel [1]. La première des équations (15) étant vérifiée, il reste

[1] Briot et Bouquet, *Traité des fonctions elliptiques*, p. 242, théorème V.

à exprimer que les zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifient les autres équations (15).

D'après l'expression (17) de $\Phi(t)$, celles des équations (15) qui contiennent les quantités a_i, a'_i peuvent s'écrire

$$(21)\quad \Phi(a_i) = e^{u_i - \frac{(n+1)\pi\sqrt{-1}}{2K}(a_i - a'_i)} \frac{\Theta^{n+1}(a'_i)}{\Theta^{n+1}(a_i)} \frac{H[a_i + u - (n+1)K'\sqrt{-1}]}{H[a'_i + u - (n+1)K'\sqrt{-1}]} \Phi(a'_i),$$

où

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q;$$

ces relations fournissent q nouvelles équations linéaires entre les coefficients (19) de la fonction Φ. Enfin, celles des équations (15) qui contiennent les quantités b_j fournissent

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

équations linéaires entre ces mêmes coefficients.

En effet, l'équation (17) donne par la différentiation les identités suivantes dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\psi(t) = Z[t + u - (n+1)\sqrt{-1}K'] - (n+1)\frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} - (n+1)\frac{\pi\sqrt{-1}}{K},$$

et dans lesquelles le signe Σ indique une sommation étendue aux n zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \Phi(t)[\Sigma Z(t - t_1) + \psi(t)],\\
\Phi''(t) &= \Phi'(t)[\Sigma Z(t - t_1) + \psi(t)] + \Phi(t)[\Sigma Z'(t - t_1) + \psi'(t)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Phi^{(\alpha_j)}(t) &= \Phi^{(\alpha_j-1)}(t)[\Sigma Z(t - t_1) + \psi(t)] + \ldots\\
&\quad + \Phi(t)[\Sigma Z^{(\alpha_j-1)}(t - t_1) + \psi^{(\alpha_j-1)}(t)];
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, d'après le dernier groupe des équations (15), les relations suivantes :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Phi'(b_j) + \Phi(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] = 0,\\
&\Phi''(b_j) + \Phi'(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] - \Phi(b_j)[u_{j,2} + \psi'(b_j)] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi^{(\alpha_j)}(b_j) + \Phi^{(\alpha_j-1)}(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] + \ldots\\
&\qquad \pm \Phi(b_j)[u_{j,\alpha_j} + \psi^{(\alpha_j-1)}(b_j)] = 0,
\end{aligned}\right.$$

avec $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$.

Les équations (20), (21) et (22) forment un système de

$$1+q+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r,$$

c'est-à-dire de n équations linéaires et homogènes entre les $(n+1)$ coefficients (19), équations qui permettent de déterminer les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux en fonctions uniformes des u, u_i, $u_{j,k}$. La fonction $\Phi(t)$, (17'), qui s'annule pour

$$t=t_1,\quad t_2\ldots t_n,\quad (n+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}'-u,$$

est ainsi complètement déterminée ; on pourrait l'écrire sous forme de déterminant en égalant à zéro le déterminant des coefficients de

$$\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_n$$

dans l'équation

(23) $$\mathrm{F}(z)+z'\,\mathrm{F}_1(z)=0$$

et dans les équations (20), (21) et (22). Soit (23) l'équation obtenue de cette manière, équation dont les coefficients sont uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Si nous rendons cette équation rationnelle en z en l'écrivant

$$\mathrm{F}^2(z)-z'^2\,\mathrm{F}_1^2(z)=0,$$

nous aurons une équation en z de degré $(n+1)$ qui admettra pour racines

$$z_1=\mathrm{sn}^2 t_1,\ z_2=\mathrm{sn}^2 t_2,\ \ldots,\ z_n=\mathrm{sn}^2 t_n,\ z_{n+1}=\mathrm{sn}^2\left[(n+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}'-u\right].$$

Par une simple division, on pourra débarrasser l'équation de cette dernière racine z_{n+1}, et il restera une équation en z de degré n ayant pour racines z_1, z_2, ..., z_n. L'équation (23) donnera ensuite les valeurs de z' correspondant aux valeurs z_1, z_2, ..., z_n.

Soit alors $\mathrm{R}(z, z')$ une fonction rationnelle quelconque de z et z' ; les valeurs

(24) $$\mathrm{R}(z_1, z'_1),\ \mathrm{R}(z_2, z'_2),\ \ldots,\ \mathrm{R}(z_n, z'_n)$$

que prend cette fonction rationnelle aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u, u_i, u_{j,k}$. En effet, d'après (23), on a pour chaque valeur de $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$z'_i = -\frac{F(z_i)}{F_1(z_i)},$$

et les valeurs (24) sont rationnelles en $z_1, z_2, \ldots, z_n$; elles sont donc racines d'une équation de degré n à coefficients uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$, puisqu'il en est ainsi de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Mais $R(z, z')$ est l'expression générale d'une fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}\,K'$: donc enfin les valeurs que prend une fonction elliptique de périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}\,K'$ aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Ce qui démontre la proposition générale que nous avions en vue au sujet des équations (14) et (15).

7. Il sera maintenant facile de déduire de là la démonstration du théorème III, § 5.

En effet, soit donnée une fonction elliptique quelconque $f_1(t)$; la décomposition de cette fonction en éléments simples nous donnera

$$f_1(t) = \text{const.} + \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i [Z(t-a_i) - Z(t-a'_i)] \\ + \sum_{j=1}^{j=r} [\mathcal{B}_{j,1} Z'(t-b_j) + \mathcal{B}_{j,2} Z''(t-b_j) + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} Z^{(\alpha_j)}(t-b_j)].$$

Or nous pouvons, sans changer la nature des intégrales des équations (14), remplacer l'une d'entre elles par une combinaison linéaire et homogène de cette équation avec les autres. Nous pouvons, en particulier, remplacer la seconde des équations (14) par

$$f_1(t_1)\,dt_1 + f_1(t_2)\,dt_2 + \ldots + f_1(t_n)\,dt_n = dU_1,$$

où U_1 a la valeur

$$U_1 = u\,\text{const.} + \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=r} [\mathcal{B}_{j,1} u_{j,1} + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} u_{j,\alpha_j}].$$

Donc le théorème III est démontré de la même façon que le théorème II relatif aux fonctions rationnelles l'a été à la page 253.

Des remarques analogues à celles qui ont été faites au sujet du théorème II (p. 254) trouveraient encore leur place ici ; je ne m'y arrêterai pas.

8. Pour faire tout d'abord l'application de la méthode précédente à un exemple simple, prenons les deux équations différentielles

$$(25)\quad \begin{cases} dt_1 + dt_2 = du, \\ k^2 \operatorname{sn}^2 t_1\, dt_1 + k^2 \operatorname{sn}^2 t_2\, dt_2 = du_1. \end{cases}$$

L'application immédiate de la méthode montre que nous nous trouvons dans un cas où l'une des quantités appelées b_j dans les équations (14) est égale à $2K'\sqrt{-1}$. Nous verrons comment le calcul se présente dans ce cas, sans qu'il soit nécessaire de faire le changement que nous avons indiqué à la page 257, pour éviter toute forme d'indétermination dans les équations générales. En effectuant l'intégration et posant

$$v = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} u - u_1,$$

les équations deviennent

$$(25')\quad \begin{cases} t_1 + t_2 = u, \\ \dfrac{\Theta'(t_1)}{\Theta(t_1)} + \dfrac{\Theta'(t_2)}{\Theta(t_2)} = v. \end{cases}$$

La fonction

$$\Phi(t) = \frac{H(t - t_1)\, H(t - t_2)\, \Theta(t + u)}{\Theta^3(t)},$$

qui admet les périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, peut s'écrire

$$\Phi(t) = A + Bz + Cz',$$

où

$$z = \operatorname{sn}^2 t, \quad z' = \frac{d \operatorname{sn}^2 t}{dt}.$$

Égalant les deux valeurs de la dérivée logarithmique $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$, il vient,

en faisant

$$t = \varepsilon + \sqrt{-1}\,K',$$

$$\frac{B z' + C z''}{A + B z + C z'} + 3Z(\varepsilon) = \frac{\Theta'(\varepsilon - t_1)}{\Theta(\varepsilon - t_1)} + \frac{\Theta'(\varepsilon - t_2)}{\Theta(\varepsilon - t_2)} + Z(\varepsilon + u).$$

Lorsque ε tend vers zéro, le second membre tend vers la limite

$$Z(u) - v;$$

quant au premier, il se présente sous la forme indéterminée $-\infty + \infty$; mais, dans le voisinage de $\varepsilon = 0$, on a

$$z = \frac{1}{k^2\varepsilon^2} + \ldots, \quad z' = -\frac{2}{k^2\varepsilon^3} + \ldots, \quad z'' = \frac{6}{k^2\varepsilon^4} + \ldots, \quad Z(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \ldots;$$

on conclut que, lorsque ε tend vers zéro, le premier membre tend vers $-\frac{B}{2C}$. On a donc

$$B = 2C[Z(u) - v].$$

Enfin la fonction $\Phi(t)$ s'annule pour $t = \sqrt{-1}\,K' - u$, ce qui donne

$$A + B\zeta + C\zeta' = 0,$$

où ζ et ζ' sont ce que deviennent z et z' pour $t = \sqrt{-1}\,K' - u$. L'équation $\Phi(t) = 0$, qui a pour racines t_1, t_2 et $(\sqrt{-1}\,K' - u)$, est donc

$$(26) \qquad 2[Z(u) - v](z - \zeta) + z' - \zeta' = 0,$$

et la question se trouve ainsi résolue. Si l'on veut former l'équation du second degré, qui admet pour racines

$$z_1 = \mathrm{sn}^2 t_1, \quad z_2 = \mathrm{sn}^2 t_2,$$

il suffit de rendre l'équation (26) rationnelle en z, en isolant z' et élevant au carré.

Cette équation, après suppression du facteur $z - \zeta$, sera l'équation

du second degré cherchée. On trouve ainsi, tout calcul fait,

$$k^2(z_1+z_2) = 1 + k^2 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + \left[\frac{H'(u)}{H(u)} - v\right]^2,$$

$$k^4 z_1 z_2 = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}\left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - v\right]^2;$$

les seconds membres sont des fonctions uniformes de u et u_1 qui admettent deux groupes de périodes conjuguées, à savoir pour u les périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, et pour u_1 les périodes de l'intégrale de seconde espèce $2J$ et $2J'\sqrt{-1}$ multipliées par k^2.

En appliquant à l'intégration des équations (25) la méthode de Clebsch, on trouve les résultats sous une forme un peu différente. Ainsi l'on obtient, par exemple,

$$k^4 z_1 z_2 = \left\{\frac{1}{\operatorname{sn} u}\left[v - 2\frac{\Theta'\left(\frac{u}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{u}{2}\right)}\right] + k^2 \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}\right\}^2.$$

Les deux expressions ainsi trouvées sont identiques, en vertu de la relation

$$k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2\frac{u}{2} = 2\frac{\Theta'\left(\frac{u}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

que l'on déduit facilement de la formule de décomposition en éléments simples de la fonction

$$\frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2\alpha}.$$

Pour traiter un deuxième exemple, dans lequel les éléments différentiels admettent des pôles d'un ordre supérieur au second, prenons les équations

$$(27)\qquad \begin{cases} dt_1 + dt_2 + dt_3 = du, \\ pt_1\,dt_1 + pt_2\,dt_2 + pt_3\,dt_3 = du_1, \\ p't_1\,dt_1 + p't_2\,dt_2 + p't_3\,dt_3 = du_2, \end{cases}$$

où la fonction pt est la fonction introduite par M. Weierstrass (¹). L'intégration de ces équations donne immédiatement

$$(27') \quad \left\{ \begin{aligned} & t_1 + t_2 + t_3 = u, \\ & \frac{\sigma' t_1}{\sigma t_1} + \frac{\sigma' t_2}{\sigma t_2} + \frac{\sigma' t_3}{\sigma t_3} = -u_1, \\ & pt_1 + pt_2 + pt_3 = u_2. \end{aligned} \right.$$

Pour suivre la méthode générale, considérons la fonction elliptique de t

$$\Phi(t) = \frac{\sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)\sigma(t-t_3)\sigma(t+u)}{\sigma^4 t},$$

qui s'annule aux points t_1, t_2, t_3, $-u$ et qui admet le pôle d'ordre 4, $t=0$. La méthode de M. Hermite pour la décomposition en éléments simples donne ici, avec les nouvelles notations,

$$\Phi(t) = A + Bpt + Cp't + Dp''t,$$

et la question est de déterminer les coefficients A, B, C, D en fonction de u, u_1, u_2, de telle façon que la fonction $\Phi(t)$ s'annule pour $t = t_1$, t_2, t_3, $-u$. Soit, pour cela,

$$F(t) = \sigma^4 t\,\Phi(t) = \sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)\sigma(t-t_3)\sigma(t+u);$$

les équations (27′) donneront

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{F'(0)}{F(0)} = u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \\ & \frac{F''(0)}{F(0)} - \left[\frac{F'(0)}{F(0)}\right]^2 = -u_2 - pu, \end{aligned} \right.$$

comme on le voit, en faisant $t=0$ dans les expressions

$$\frac{d \log F(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 \log F(t)}{dt^2}.$$

(¹) *Die elliptische Functionen,* nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor Weierstrass, bearbeitet und herausgegeben von H.-A. Schwarz. (Göttingen, 1881).

Or il est facile d'exprimer les premiers membres des équations (28) en fonction des coefficients A, B, C, D. En effet, on a, dans un certain domaine de $t = 0$,

$$pt = \frac{1}{t^2} + \frac{g_2}{20}t^2 + \ldots, \quad p't = -\frac{2}{t^3} + \frac{g_2}{10}t + \ldots, \quad p''t = \frac{6}{t^4} + \frac{g_2}{10} + \ldots$$

et, pour toutes les valeurs de t,

$$\sigma^4 t = t^4\left(1 - \frac{g_2}{2^3.3.5}t^4 + \ldots\right);$$

donc on a, dans un certain domaine de $t = 0$,

$$F(t) = \sigma^4 t\,\Phi(t) = 6D - 2Ct + Bt^2 + Et^4 + \ldots;$$

par suite,

$$\frac{F'(0)}{F(0)} = -\frac{C}{3D}, \quad \frac{F''(0)}{F(0)} = \frac{B}{3D}.$$

Les équations (28) donnent alors

$$C = -3D\left(u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right),$$

$$B = 3D\left[\left(u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)^2 - u_2 - pu\right];$$

enfin, en écrivant que $\Phi(t)$ s'annule pour $t = -u$, on a

$$A + Bpu - Cp'u + Dp''u = 0;$$

on obtient ainsi trois équations pour déterminer les rapports des coefficients A, B, C au coefficient D. Remplaçant A, B, C par les valeurs tirées de ces relations, on a, pour l'équation cherchée $\Phi(t) = 0$,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &3\left[\left(u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)^2 - u_2 - pu\right](pt - pu) \\ &\quad - 3\left(u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)(p't + p'u) + p''t - p''u = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation admet pour racines $t = t_1, t_2, t_3, -u$. On voit que ses

coefficients sont uniformes en u, u_1, u_2 et possèdent, par rapport à u et u_1, deux groupes de périodes, à savoir : pour u, les périodes 2ω et $2\omega'$, et pour u_1, les périodes correspondantes -2η et $-2\eta'$.

Si, dans l'équation (29), on isole le terme en $p't$, puis qu'on élève les deux membres au carré, de façon à avoir une équation rationnelle en pt, cette équation rationnelle sera du quatrième degré, et, après suppression du facteur $pt - pu$, on aura une équation du troisième degré ayant pour racines pt_1, pt_2 et pt_3. L'un des coefficients de cette équation nous est connu *a priori*, car, d'après la troisième des équations (27'), la somme des racines est égale à u_2.

9. Après avoir ainsi examiné les cas où le genre p de la relation algébrique (2) est égal à 0 ou 1, nous allons nous occuper du cas général où le genre p est quelconque; la méthode que nous suivrons sera la même que pour ces deux cas particuliers. Nous emploierons les notations suivantes pour désigner les intégrales abéliennes relatives à la courbe de degré m et de genre p représentée par l'équation (2).

Les p intégrales normales de première espèce seront désignées par

$$u^{(1)}(x,y),\ u^{(2)}(x,y),\ \ldots,\ u^{(p)}(x,y);$$

l'intégrale normale de troisième espèce qui admet les deux points critiques logarithmiques (ξ, η) et (ξ', η') sera désignée par

$$\prod_{\xi',\eta'}^{\xi,\eta}(x,y);$$

enfin l'intégrale normale de seconde espèce qui admet le pôle simple $x = \xi$, $y = \eta$ avec le résidu $+1$, par

$$Z(x,y;\xi,\eta);$$

les dérivées de cette intégrale par rapport au paramètre ξ seront appelées

$$Z'(x,y;\xi,\eta),\ Z''(x,y;\xi,\eta),\ \ldots.$$

Ces intégrales s'expriment, comme il est connu, à l'aide des fonc-

tions Θ à p arguments. Soit, en adoptant les notations de M. Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, p. 114), $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ou plus simplement $\Theta(u_i)$ la fonction Θ principale formée avec les périodes normales des intégrales de première espèce; on aura

$$\prod_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta}(x, y) = \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]\,\Theta[-u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]\,\Theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les $(p-1)$ points (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., $(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1})$ étant arbitraires; la fonction Π ne dépend pas de ces $(p-1)$ points. L'intégrale de seconde espèce sera alors

$$Z(x, y; \xi, \eta) = -\frac{d\Pi}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi} \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

10. Cela posé, considérons le système d'équations suivantes analogues aux équations (15)

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{ll}
u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_n, y_n) = u_i & (i = 1, 2, \ldots, p), \\
\prod_{\xi'_j, \eta'_j}^{\xi_j, \eta_j}(x_1, y_1) + \prod_{\xi'_j, \eta'_j}^{\xi_j, \eta_j}(x_2, y_2) + \ldots + \prod_{\xi'_j, \eta'_j}^{\xi_j, \eta_j}(x_n, y_n) = u_{p+j} & (j = 1, 2, \ldots, q), \\
\left.\begin{array}{l}
Z(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z(x_2, y_2; a_k, b_k) + \ldots + Z(x_n, y_n; a_k, b_k) = u_{k,1} \\
Z'(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z'(x_2, y_2; a_k, b_k) + \ldots + Z'(x_n, y_n; a_k, b_k) = u_{k,2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^{(\nu_k-1)}(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z^{(\nu_k-1)}(x_2, y_2; a_k, b_k) + \ldots + Z^{(\nu_k-1)}(x_n, y_n; a_k, b_k) = u_{k,\nu_k}
\end{array}\right\} & (k = 1, 2, \ldots, r),
\end{array}\right.$$

où

$$p + q + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n.$$

Tous les points (ξ_j, η_j) sont différents les uns des autres, mais un certain nombre des points (ξ'_j, η'_j) peuvent coïncider. Les points (a_k, b_k) sont différents les uns des autres, mais peuvent coïncider avec les points (ξ_j, η_j), (ξ'_j, η'_j). On a ainsi n équations définissant les n points analy-

tiques

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

en fonction des quantités

$$(31)\qquad u_i,\ u_{p+j},\ u_{k,1},\ u_{k,2},\ \ldots,\ u_{k,\nu_k},$$

de telle façon que les valeurs acquises par une fonction rationnelle de x et y en ces n points sont racines d'une équation à coefficients uniformes par rapport aux quantités (31).

Pour le démontrer, nous formerons l'équation d'une courbe

$$\Phi(x, y) = 0,$$

dont les coefficients sont uniformes par rapport aux quantités (31), et qui coupe la courbe

$$(2)\qquad F(x, y) = 0$$

aux n points

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

et en des points connus.

Nous pouvons, pour simplifier les raisonnements, imaginer qu'on a fait sur la courbe donnée (2) une transformation unidéterminative qui transforme les points singuliers en points doubles ou de rebroussements; nous pouvons aussi supposer que, en vertu de cette transformation, aucun des points (ξ_j, η_j), (ξ'_j, η'_j), (a_k, b_k) ne coïncide avec un point critique. Soit alors d le nombre total de points doubles et de rebroussements de la courbe donnée $F = 0$ de degré m; coupons cette courbe par une courbe adjointe $\Psi = 0$ de degré $\mu > m - 3$.

On sait ([1]) qu'on peut, sans changer le système des points d'intersection de la courbe Ψ avec F, remplacer la courbe Ψ par une autre

$$(32)\qquad \Phi(x, y) = 0$$

([1]) *Leçons de Géométrie de Clebsch*, traduction française, t. II, p. 130 et suiv.

de même degré, mais ne renfermant plus d'une façon linéaire et homogène que

$$\mu m - 2d - p + 1$$

coefficients. Lorsque ces coefficients varient, la courbe $\Phi = 0$ coupe la courbe $F = 0$ en

$$\mu m - 2d$$

points variables, parmi lesquels p sont déterminés quand on connaît les

$$\mu m - 2d - p$$

autres. Prenons pour μ le plus petit entier satisfaisant aux deux conditions

$$\mu > m - 3, \quad \mu m - 2d \geqq n + p;$$

μ étant ainsi déterminé, nous assujettirons la courbe $\Phi = 0$ à passer par

$$\mu m - 2d - (n + p)$$

points fixes (a', b'), (a'', b''), ... de la courbe F; ce qui détermine

$$\mu m - 2d - (n + p)$$

des coefficients qui figurent dans Φ en fonction linéaire et homogène des autres. Après cette détermination, l'équation de la courbe (32) contiendra, d'une façon linéaire et homogène, $(n + 1)$ coefficients A_0, A_1, A_2, ..., A_n; cette courbe coupera la courbe donnée F en $(n + p)$ points variables, parmi lesquels p sont déterminés quand on connaît les n autres. Soient

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n);\ (x'_1, y'_1),\ (x'_2, y'_2),\ \ldots,\ (x'_p, y'_p)$$

les $(n + p)$ points d'intersection variables de la courbe $\Phi = 0$ avec la courbe $F = 0$. D'après le théorème d'Abel, les relations qui déterminent p de ces points en fonction des n autres sont

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_n, y_n) \\ &\qquad + u^{(i)}(x'_1, y'_1) + \ldots + u^{(i)}(x'_p, y'_p) \equiv K_i, \end{aligned}\right.$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

les K_i étant des constantes indépendantes des coefficients A_0, A_1, ..., A_n qui figurent dans Φ. Assujettissons les points

$$(34)\qquad (x'_1, y'_1),\ (x'_2, y'_2),\ \ldots,\ (x'_p, y'_p)$$

à vérifier les p équations

$$(35)\qquad \left\{ \begin{aligned} & u^{(i)}(x'_1, y'_1) + u^{(i)}(x'_2, y'_2) + \ldots \\ & \qquad + u^{(i)}(x'_p, y'_p) = K_i - u_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces équations déterminent les points (34) en fonction de u_1, u_2, ..., u_p; l'expression des coordonnées de ces points en fonction de u_1, u_2, ..., u_p constitue le problème d'inversion de Jacobi, et l'on sait, d'après Riemann, exprimer toute fonction rationnelle symétrique des p points (34) en fonction uniforme de u_1, u_2, ..., u_p par des quotients de fonctions Θ à p arguments.

Les points (34) étant ainsi déterminés, les équations (33) se réduisent à

$$(33')\qquad \left\{ \begin{aligned} & u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots \\ & \qquad + u^{(i)}(x_n, y_n) = u_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire aux p premières des équations (30). En écrivant que la courbe $\Phi(x, y) = 0$ passe par les points (34), on aura p relations

$$\Phi(x'_i, y'_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

que nous remplacerons par les relations équivalentes

$$(36)\qquad x_1'^{i-1}\,\Phi(x'_1, y'_1) + x_2'^{i-1}\,\Phi(x'_2, y'_2) + \ldots + x_p'^{i-1}\,\Phi(x'_p, y'_p) = 0,$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces équations (36) fournissent p relations entre les constantes A_0, A_1, ..., A_n qui figurent linéairement dans l'équation $\Phi(x, y) = 0$; et, dans ces équations, les coefficients de A_0, A_1, ..., A_n sont des fonctions symétriques des p points (34), c'est-à-dire des fonctions abé-

liennes de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ exprimables à l'aide des fonctions Θ. Nous pouvons donc dire que les équations (36) sont p relations linéaires et homogènes entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à coefficients uniformes en $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

En vertu de ces relations (36), les p premières des équations (30) sont vérifiées par les n points variables

$$(37) \qquad (x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_n, y_n),$$

où la courbe $\Phi(x, y) = 0$ coupe la courbe donnée. En écrivant que ces n points (37) vérifient aussi les autres équations (30), nous aurons, entre ces mêmes coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$, $n - p$ autres relations linéaires qui, avec les relations (36), détermineront complètement les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux et qui permettront, par suite, d'écrire l'équation de la courbe cherchée $\Phi(x, y) = 0$. Voici comment nous obtiendrons ces $(n - p)$ relations linéaires.

Dans l'expression $\Phi(x, y)$, attribuons aux coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des valeurs *déterminées* quelconques indépendantes de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et, par suite, ne vérifiant pas les équations (36), et désignons par $\Phi_1(x, y)$ l'expression déterminée ainsi obtenue. Sur les $\mu.m$ points d'intersection des courbes $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ avec la courbe donnée, il y en a $(\mu m - n - p)$ qui sont les mêmes pour les deux courbes; par conséquent, la fraction rationnelle

$$(38) \qquad \frac{\Phi(x, y)}{\Phi_1(x, y)}$$

a $(n + p)$ zéros et $(n + p)$ infinis; les $(n + p)$ zéros sont les points (37) qui varient avec les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de Φ et les points (35) qui dépendent de $u_1, u_2, \ldots, u_p$; les $(n + p)$ infinis sont des points fixes indépendants de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, à savoir les $(n + p)$ points d'intersection de la courbe fixe $\Phi_1(x, y) = 0$ qui sont distincts des points d'intersection de $\Phi = 0$ avec la courbe donnée $F = 0$; désignons ces $(n + p)$ infinis fixes par

$$(39) \qquad (s_1, t_1), \ (s_2, t_2), \ \ldots, \ (s_n, t_n), \ (s'_1, t'_1), \ \ldots, \ (s'_p, t'_p).$$

La fraction rationnelle (38) pourra s'écrire ainsi

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Phi(x,y)}{\Phi_1(x,y)} = & \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x'_k,y'_k) - \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k,t'_k) + \mathrm{C}_i\right]} \\ & \times \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\Theta[u^{(i)}(x_\varkappa,y_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) - h_i]}{\Theta[u^{(i)}(s_\varkappa,t_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) - h_i]}, \end{aligned} \right.$$

où les C_i ont la signification que leur donne Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, Chap. XII) et où les h_i ont la même valeur que précédemment (p. 268). Cette forme de la fraction (40) résulte des propriétés connues de la fonction $\Theta[u'^{(i)}(x,y) - \mathrm{G}_i]$, telles qu'elles ont été indiquées par Riemann. En effet, le premier facteur

$$(41)\quad \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x'_k,y'_k) + \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k,t'_k) + \mathrm{C}_i\right]}$$

s'annule lorsque le point (x,y) coïncide avec l'un des p points (x'_k,y'_k) et devient infini lorsque $x = s'_k$, $y = t'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Chacun des n autres facteurs, tels que

$$\frac{\Theta[u^{(i)}(x_\varkappa,y_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) - h_i]}{\Theta[u^{(i)}(s_\varkappa,t_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) + h_i]},$$

admet un seul zéro $x = x_\varkappa$, $y = y_\varkappa$ et un seul infini $x = s_\varkappa$, $y = t_\varkappa$; ce qui démontre l'équation (40). Mais, en vertu des relations (35), le facteur (41) s'écrit

$$\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) + u_i - \mathrm{K}_i + \mathrm{C}_i]}{\Theta\left[u'^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k,t'_k) - \mathrm{C}_i\right]};$$

donc, en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(42)\quad \begin{cases} \Lambda(x,y) = \Phi_1(x,y) \dfrac{\Theta[u^{(i)}(x,y) + u_i - K_i + C_i]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k, t'_k) + C_i\right]} \\ \qquad \times \prod_{\chi=1}^{\chi=n} \dfrac{\Theta[-u^{(i)}(x,y) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(s_\chi, t_\chi) - u^{(i)}(x,y) + h_i]}, \end{cases}$$

on a

$$(43)\qquad \Phi(x,y) = \Lambda(x,y) \prod_{\chi=1}^{\chi=n} \frac{\Theta[u^{(i)}(x_\chi, y_\chi) - u^{(i)}(x,y) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(x,y) + h_i]},$$

$\Lambda(x,y)$ étant une fonction entièrement connue, uniforme en u_1, u_2, ..., u_p.

D'après cette forme de $\Phi(x,y)$, celles des équations (30) qui contiennent les intégrales de troisième espèce peuvent s'écrire

$$(44)\qquad \Phi(\xi_j, \eta_j) = \Phi(\xi'_j, \eta'_j) \frac{\Lambda(\xi_j, \eta_j)}{\Lambda(\xi'_j, \eta'_j)} e^{u_{p+j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

et l'on a ainsi q équations linéaires homogènes nouvelles entre les coefficients A_0, A_1, ..., A_n de Φ, les coefficients de ces équations étant uniformes en u_1, u_2, ..., u_p; u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_{p+q}.

Enfin, pour exprimer que les points (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) vérifient celles des équations (30) qui contiennent les intégrales de seconde espèce, nous remarquerons que l'équation (43) donne par la différentiation par rapport à x les identités suivantes, où l'on désigne par $M(x,y)$ la fonction rationnelle

$$\frac{d \log \Lambda(x,y)}{dx},$$

et où le signe Σ indique une sommation étendue aux n points (x_1, y_1),

$(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$,

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Phi'(x,y) = \Phi(x,y)\left[\mathrm{M}(x,y) - \Sigma \mathrm{Z}(x_1, y_1; x, y)\right]\\
&\Phi''(x,y) = \Phi'(x,y)\left[\mathrm{M}(x,y) - \Sigma \mathrm{Z}(x_1, y_1; x, y)\right]\\
&\qquad\qquad + \Phi(x,y)\left[\mathrm{M}'(x,y) - \Sigma \mathrm{Z}'(x_1, y_1; x, y)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Phi^{(\nu_k)}(x,y) = \Phi^{(\nu_k-1)}\left[\mathrm{M} - \Sigma \mathrm{Z}\right] + (\nu_k - 1)\Phi^{(\nu_k-2)}\left[\mathrm{M}' - \Sigma \mathrm{Z}'\right] + \ldots\\
&\qquad\qquad + \Phi(x,y)\left[\mathrm{M}^{(\nu_k-1)}(x,y) - \Sigma \mathrm{Z}^{(\nu_k-1)}(x_1, y_1; x, y)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations, suivant la notation indiquée (p. 267 et 268).

$$\mathrm{Z}^{(\nu)}(x_1, y_1; x, y)$$

désigne la dérivée

$$\frac{d^\nu \mathrm{Z}(x_1, y_1; x, y)}{dx^\nu}.$$

En remplaçant, dans les identités (45), x et y par a_k, b_k, ces identités deviennent, en vertu du dernier groupe des équations (30),

$$
(46)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Phi'(a_k, b_k) = \Phi(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}(a_k, b_k) - u_{k,1}\right],\\
&\Phi''(a_k, b_k) = \Phi'(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}(a_k, b_k) - u_{k,1}\right]\\
&\qquad\qquad + \Phi(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}'(a_k, b_k) - u_{k,2}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Phi^{(\nu_k)}(a_k, b_k) = \Phi^{(\nu_k-1)}(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}(a_k, b_k) - u_{k,1}\right]\\
&\qquad\qquad + (\nu_k - 1)\Phi^{(\nu_k-2)}(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}'(a_k, b_k) - u_{k,2}\right] + \ldots\\
&\qquad\qquad + \Phi(a_k, b_k)\left[\mathrm{M}^{(\nu_k-1)}(a_k, b_k) - u_{k,\nu_k}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

On a ainsi $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r)$ équations linéaires homogènes entre A_0, $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, et les coefficients de ces équations sont uniformes en u_1, $u_2, \ldots, u_{p+q}$; $u_{k,1}, u_{k,2}, \ldots, u_{k,\nu_k}$.

En résumé, les équations (36), (44) et (46), au nombre de

$$p + q + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n,$$

fournissent n relations linéaires et homogènes pour déterminer les rapports des quantités $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à l'une d'entre elles. En égalant à zéro le déterminant des coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ dans ces équations et dans l'équation $\Phi(x, y) = 0$, on aura, sous forme de déterminant, l'équation cherchée

$$(47) \qquad \Phi(x, y) = 0$$

d'une courbe de degré μ coupant la courbe donnée $F = 0$ en des points connus et aux n points (37).

On en conclut immédiatement que les abscisses de ces n points sont racines d'une équation de degré n à coefficients uniformes en u_1, $u_2, \ldots, u_{p+q}$; $u_{k,1}, \ldots, u_{k,\nu_k}$. En effet, par l'élimination de y entre l'équation (47) et l'équation de la courbe donnée $F(x, y) = 0$, on obtiendra une équation de degré $m\mu$ en x qui admettra pour racines les abscisses des points (37), des points (34), des points singuliers et enfin des points fixes (a', b'), (a'', b''), ... (p. 270). En divisant le premier membre de cette équation par les polynômes en x qui admettent pour racines les abscisses des points (34), des points singuliers et des points fixes (a', b'), (a'', b''), ..., on obtiendra l'équation annoncée de degré n ayant pour racines les abscisses des points (37).

D'une façon générale, soit

$$z = R(x, y),$$

$R(x, y)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x et y. Les valeurs que prend cette fonction z aux points d'intersection des deux courbes

$$\Phi = 0, \quad F = 0$$

sont racines d'une équation de degré $m\mu$ qui, après suppression des facteurs étrangers, fournira une équation de degré n en z ayant pour racines

$$R(x_1, y_1), \; R(x_2, y_2), \; \ldots, \; R(x_n, y_n);$$

les coefficients de cette équation seront uniformes en u_1, u_2, ..., u_{p+q},

$u_{k,1}, u_{k,2}, \ldots, u_{k,\nu_k}$; ils contiendront rationnellement les variables $u_{k,1}$, $u_{k,2}, \ldots, u_{k,\nu_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), comme arguments de fonctions exponentielles les variables $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+q}$, et comme arguments de fonctions Θ les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$. La nature des groupes de périodes simultanées de ces coefficients résulte immédiatement de la forme des équations (30); nous ne nous y arrêterons pas.

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré pour ces équations (30).

11. Il sera maintenant facile d'établir le théorème général I, énoncé à la page 246. En effet, soit $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; l'intégrale

$$\int \varphi_1(x, y)\, dx \tag{48}$$

pourra être décomposée en intégrales normales de *première, deuxième* et *troisième* espèce; on pourra, de plus, par une transformation unidéterminative, amener les pôles et les points critiques logarithmiques des intégrales de deuxième et troisième espèce à être distincts des points critiques de la relation algébrique (2). Alors l'intégrale (48) sera de la forme

$$\tag{49} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=p} \mathcal{A}_i\, u^{(i)}(x, y) + \sum_{j=1}^{j=q} \mathcal{B}_j \prod_{\xi'_j, \eta'_j}^{\xi_j, \eta_j} (x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=r} \big[\mathcal{C}_{k,1}\, Z(x, y; a_k, b_k) \\ &\qquad + \mathcal{C}_{k,2}\, Z'(x, y; a_k, b_k) + \ldots + \mathcal{C}_{k,\nu_k}\, Z^{(\nu_k - 1)}(x, y; a_k, b_k) \big]. \end{aligned} \right.$$

Or on peut, sans changer la nature des intégrales des équations (30), remplacer l'une quelconque d'entre elles par une combinaison linéaire à coefficients constants de cette équation avec les autres. On peut, par exemple, en conservant toutes les autres, remplacer la *dernière* d'entre elles par

$$\int \varphi_1(x_1, y_1)\, dx_1 + \int \varphi_1(x_2, y_2)\, dx_2 + \ldots + \int \varphi_1(x_n, y_n)\, dx_n = \mathrm{U},$$

en faisant

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} U = {} & \sum_{i=1}^{i=p} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=q} \mathcal{B}_j u_{p+j} \\ & + \sum_{k=1}^{k=r} (\mathcal{C}_{k,1} u_{k,1} + \mathcal{C}_{k,2} u_{k,2} + \ldots + \mathcal{C}_{k,\nu_k} u_{k,\nu_k}). \end{aligned}\right.$$

On obtient ainsi un système d'équations de la forme (1) possédant la propriété indiquée dans l'énoncé du théorème I. Ce théorème est donc démontré.

On voit, en outre, quelles sont les fonctions rationnelles $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, ..., $\varphi_n(x, y)$ qu'il faut associer à la fonction donnée $\varphi_1(x, y)$; ce sont les dérivées par rapport à x des p intégrales de première espèce et de toutes les intégrales de deuxième et troisième espèce qui figurent dans l'expression (49) de l'intégrale (48), à l'exception de la *dernière*,

$$Z^{(\nu_r - 1)}(x, y; a_r, b_r),$$

d'entre elles. On montrerait, comme nous l'avons fait à propos des courbes unicursales (p. 254), que le nombre $(n-1)$ des fonctions φ_2, φ_3, ..., φ_n à associer à φ_1 est un minimum, et qu'il peut être dépassé autant qu'on le veut.

12. Nous avons supposé, pour plus de simplicité, dans l'énoncé du théorème I (p. 246), qu'une seule fonction rationnelle $\varphi_1(x, y)$ est donnée arbitrairement, et nous venons de montrer comment on peut déterminer les $(n-1)$ autres fonctions

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y)$$

à associer à celle-là.

La méthode que nous avons suivie à cet effet permet de démontrer la proposition plus générale suivante :

Étant données k fonctions rationnelles de x et y linéairement indépendantes

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_k(x, y),$$

on peut leur associer un certain nombre $(n-k)$ *d'autres fonctions rationnelles*

$$\varphi_{k+1}(x,y),\ \varphi_{k+2}(x,y),\ \ldots,\ \varphi_n(x,y),$$

de façon que les fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *définies par les équations* (1) *possèdent les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème I.*

Nous n'insisterons pas davantage sur cette généralisation facile du théorème I.

Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait quelle est, en Analyse, l'importance des intégrales

$$(1) \qquad \int P(x, y)\, dx,$$

où $P(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et y, et où y est la fonction algébrique de x définie par la relation

$$f(x, y) = 0,$$

f étant un polynôme. Ces intégrales ont été partagées en trois espèces; nous n'avons besoin ici que de rappeler la définition des intégrales de *première* espèce : une intégrale telle que (1) est dite de première espèce quand elle reste finie pour toute valeur, finie ou infinie, de la variable x.

Considérons maintenant une fonction algébrique z de deux variables indépendantes de x et y, définie par l'équation irréductible

$$f(x, y, z) = 0,$$

où f est un polynôme. On peut faire correspondre à cette surface des intégrales de différentielles totales de la forme

$$(2) \qquad \int P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z; ces deux fonctions ne peuvent, bien entendu, être prises arbitrairement, et la condition d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$P\,dx + Q\,dy$$

doit être supposée satisfaite.

Les intégrales de la forme (2) sont susceptibles d'une classification analogue à celle qui vient d'être rappelée pour les intégrales de différentielles algébriques, dans le cas d'une seule variable. Nous ne voulons considérer dans ce travail que les intégrales de différentielles totales de *première espèce* [1], c'est-à-dire celles *qui restent finies pour tout système de valeurs, finies ou infinies, des variables indépendantes x et y*.

Dès le début de cette étude, on rencontre une différence bien profonde entre le cas d'une variable et celui de deux variables. On sait, en effet, qu'à une courbe algébrique correspondent en général des intégrales de première espèce; ainsi, pour parler plus nettement, la courbe la plus générale d'un degré donné m possède un certain nombre, bien connu, d'intégrales de première espèce, linéairement indépendantes.

Il n'en est pas ainsi pour les surfaces algébriques : il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, correspondant à la surface la plus générale de degré m. Comment peut-on reconnaître si une surface donnée possède des intégrales de première espèce, et quel est le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes? Telles sont les questions dont nous nous occupons dans les deux premiers Chapitres de ce Mémoire.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude d'une classe de surfaces algébriques, dans laquelle la notion des intégrales de première espèce joue un rôle important : ce sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions uni-

---

(1) Sur les intégrales de seconde espèce, j'ai déjà présenté quelques considérations dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (mars 1885); l'étude de ces intégrales et de celles de troisième espèce fera l'objet d'un autre Mémoire.

formes quadruplement périodiques de deux paramètres, et nous y ajoutons cette autre condition qu'à un point *arbitraire* de la surface ne corresponde qu'un *seul* système de valeurs des deux paramètres, abstraction faite, bien entendu, des multiples des périodes. Tel ne serait pas, par exemple, le cas de la surface célèbre du quatrième degré découverte par Kummer; les coordonnées d'un point de cette surface s'expriment bien par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres; mais il est facile de vérifier que, dans ce cas, à un point arbitraire de la surface correspondent *deux* systèmes distincts de valeurs de ces paramètres. Nous montrons comment on peut reconnaître si une surface donnée est susceptible d'avoir les coordonnées d'un quelconque de ses points exprimées, de la manière indiquée, par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Il faut aller jusqu'aux surfaces du *sixième* degré pour rencontrer une surface jouissant de cette propriété.

Nous terminons ce travail par l'étude des équations de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

nous proposant de reconnaître si l'on peut satisfaire à cette équation, en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y; c'est, comme on voit, la généralisation d'un problème traité par MM. Briot et Bouquet dans leur beau Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

au moyen des fonctions elliptiques.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit donnée une relation algébrique de degré m

$$F(x, y, z) = 0$$

définissant une fonction algébrique z de x et y, et considérons la diffé-

rentielle totale

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{M},$$

où P, Q et M sont des polynômes en x, y et z, et pour laquelle la condition d'intégrabilité est supposée satisfaite.

Effectuons sur x, y, z une transformation homographique quelconque

$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1}{a x' + b y' + c z' + d},$$

$$y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2}{a x' + b y' + c z' + d},$$

$$z = \frac{a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + d_3}{a x' + b y' + c z' + d};$$

la relation précédente deviendra

$$f(x', y', z') = 0.$$

Différentions x et y, on aura

$$dx = \frac{A\,dx' + B\,dy'}{(a x' + b y' + c z' + d)^2 \dfrac{\partial f}{\partial z'}}, \quad dy = \frac{A_1\,dx' + B_1\,dy'}{(a x' + b y' + c z' + d)^2 \dfrac{\partial f}{\partial z'}},$$

A et A_1 étant des polynômes en x', y', z', de degré $m-1$ par rapport à x' et z', et de degré m par rapport à y'; de même B et B_1 sont des polynômes de degré $m-1$ en y' et z', et de degré m par rapport à x'.

Si maintenant n' est le degré de P et Q, et n celui de M, on aura

$$\frac{P}{M} = \frac{P'}{M'(a x' + b y' + c z' + d)^{n'-n}}, \quad \frac{Q}{M} = \frac{Q'}{M'(a x' + b y' + c z' + d)^{n'-n}},$$

P' et Q' étant de degré n', et M' du degré n.

Il s'ensuit que l'expression précédente prend la forme, en supprimant les accents,

$$\frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{M_1 f'_z(x, y, z)},$$

en désignant par μ le degré de M_1 par rapport à x, y et z; le degré

de P_1 par rapport à x et z est $\mu + m - 3$, et par rapport à y est $\mu + m - 2$; de même pour Q_1 le degré par rapport à y et z est $\mu + m - 3$, et $\mu + m - 2$ par rapport à x.

La différentielle totale étant mise sous cette forme, envisageons maintenant l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{M_1 f'_z},$$

et supposons que, pour toute valeur finie ou infinie de x et y, cette intégrale reste finie ; cherchons quelle conséquence on pourra en tirer; z est définie en fonction de x et y par la relation

$$f(x, y, z) = 0$$

de degré m, et nous pouvons évidemment supposer qu'elle renferme un terme en z^m.

Si nous laissons d'abord y constant, faisant seulement varier x, nous aurons une intégrale abélienne ordinaire de première espèce, et, pour qu'elle soit de première espèce, il est nécessaire que M_1 ne dépende pas de x; le même raisonnement, appliqué à y, nous montre que M_1 ne peut dépendre de y. Nous arrivons donc de suite à cette conclusion que M_1 doit être une constante, et nous écrirons l'intégrale sous la forme

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{P\,dx + Q\,dy}{f'_z(x, y, z)},$$

P est un polynôme de degré $m - 2$ en x, y, z, et de degré $m - 3$ en x et z; pareillement, Q est un polynôme de degré $m - 2$ en x, y et z, et de degré $m - 3$ en y et z.

2. Nous avons jusqu'ici laissé de côté la condition d'intégrabilité que nous avons maintenant à considérer. On aura

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{f'_z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{f'_z}\right),$$

en considérant z comme fonction de x et y. Cette relation pourra

s'écrire

$$\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} f'_z - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} f'_y\right) f'_z - \mathrm{P}(f''_{zy} f'_z - f''_{z^2} f'_y)$$
$$- \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} f'_z - f'_x \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right) f'_z + \mathrm{Q}(f''_{zx} f'_z - f''_{z^2} f'_x) = 0.$$

Le premier membre de cette égalité est un polynôme en x, y et z; il n'est pas nécessairement nul identiquement, mais seulement en vertu de l'équation

$$f(x, y, z) = 0;$$

on reconnaît facilement que l'on peut écrire la relation précédente sous la forme

$$(1) \qquad -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{P} f'_y - \mathrm{Q} f'_x}{f'_z}\right) = 0.$$

Or, si dans l'intégrale (1) nous prenons x et z pour variables au lieu de x et y, nous devons tomber sur une expression de même forme; or l'intégrale devient

$$\int \frac{\left(\frac{\mathrm{P} f'_y - \mathrm{Q} f'_x}{f'_z}\right) dx - \mathrm{Q}\, dz}{f'_y}.$$

Il est donc nécessaire que l'expression

$$\frac{\mathrm{P} f'_y - \mathrm{Q} f'_x}{f'_z}$$

puisse, en vertu de l'équation $f(x, y, z) = 0$, se mettre sous la forme d'un polynôme en x, y et z. Posons donc

$$\frac{\mathrm{P} f'_y - \mathrm{Q} f'_x}{f'_z} = \mathrm{R},$$

ou, en écrivant sous forme d'identité indépendamment de l'équation $f = 0$,

$$(2) \qquad \mathrm{P} f'_y - \mathrm{Q} f'_x - \mathrm{R} f'_z = \mathrm{N} f(x, y, z),$$

N étant aussi un polynôme.

Ceci posé, revenons à l'équation (1) qui pourra s'écrire

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}+N+f(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{N}{f'_z}\right)=0.$$

On a par conséquent, en vertu de $f=0$,

(3) $$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}+N=0.$$

Mais P, Q, R et N sont des polynômes de degré inférieur à m. Si donc, comme nous le supposons, le polynôme $f(x, y, z)$ n'est pas un produit de polynômes de degré moindre, l'*égalité précédente sera une identité,* quels que soient x, y et z.

P est de degré $m-3$ par rapport à x et à z, et de degré $m-2$ en y; Q est de degré $m-3$ en y et z, et de degré $m-2$ en x; enfin R est de degré $m-3$ par rapport à x et y, et de degré $m-2$ par rapport à z, et ces trois polynômes sont de degré $m-2$ en x, y, z pris simultanément. Quant à N, il est de degré $m-3$ en x, y et z.

Posons

$$Q=-A,\quad P=+B,\quad R=-C.$$

Les identités (2) et (3) se résumeront dans l'identité unique

$$Af'_x+Bf'_y+Cf'_z=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)f(x,y,z).$$

Ainsi on doit pouvoir trouver trois polynômes A, B, C des degrés indiqués par rapport aux variables x, y, z, et tels que l'identité précédente soit vérifiée.

5. Nous pouvons approfondir davantage la forme des polynômes A, B, C. Ceux-ci sont nécessairement de la forme

$$\begin{aligned}A&=x\varphi(x,y,z)+A_1(x,y,z),\\B&=y\psi(x,y,z)+B_1(x,y,z),\\C&=z\chi(x,y,z)+C_1(x,y,z),\end{aligned}$$

φ, ψ et χ étant des polynômes *homogènes* en x, y et z de degré $m-3$; quant à A_1, B_1, C_1, ce sont des polynômes en x, y et z d'ordre $m-3$.

Or considérons l'intégrale

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}.$$

Posons $y = \mu x$, μ étant une constante, nous aurons l'intégrale abélienne de première espèce

$$\int \frac{(B - A\mu)\,dx}{f'_z};$$

$B - A\mu$ devra être au plus du degré $m-3$; donc l'expression

$$\mu x[\psi(x, \mu x, z) - \varphi(x, \mu x, z)]$$

qui, dans $B - A\mu$, est du degré $m-2$, devra être nulle, et l'on aura alors

$$\psi(x, \mu x, z) - \varphi(x, \mu x, z) = 0,$$

quel que soit μ; on en conclut, puisque ψ et φ sont homogènes,

$$\psi(x, y, z) = \varphi(x, y, z).$$

En mettant l'intégrale sous la forme

$$\int \frac{-C\,dx + A\,dz}{f'_y},$$

on démontrerait de la même manière que $\chi(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$.

Nous arrivons à la conclusion suivante :

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) = \chi(x, y, z).$$

4. Nous venons de trouver les formes nécessaires des intégrales de différentielles totales, qui restent finies. Nous avons maintenant à nous demander si les intégrales remplissant les questions précédentes restent toujours finies.

Nous supposons donc que l'on ait, après une transformation homographique quelconque, la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Celle-ci ne possède que des *singularités ordinaires*, c'est-à-dire soit des points doubles isolés, pour lesquels le cône des tangentes ne se réduise pas à deux plans, soit des courbes doubles, sans points singuliers, pour lesquelles les deux plans tangents à la surface en chaque point seront *toujours distincts*.

Nous supposons que l'on puisse trouver trois polynômes A, B, C satisfaisant aux conditions suivantes : le premier A est au plus de degré $m-2$ par rapport à x, et de degré $m-3$ par rapport à y et z, B est de degré $m-2$ par rapport à y, et de degré $m-3$ par rapport à x et z, enfin C est de degré $m-2$ en z, et de degré $m-3$ en x et y. On a d'ailleurs l'identité

$$(\alpha) \qquad \mathrm{A} f'_x + \mathrm{B} f'_y + \mathrm{C} f'_z = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right) f(x, y, z)$$

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{\mathrm{B}\, dx - \mathrm{A}\, dy}{f'_z(x, y, z)},$$

la condition d'intégrabilité sera remplie, car elle se réduit (n° 1) à

$$-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{B} f'_y + \mathrm{A} f'_x}{f'_z}\right) = 0.$$

Or, d'après l'identité, on a, en tenant compte de $f(x, y, z) = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{B} f'_y + \mathrm{A} f'_x}{f'_z}\right) = -\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z},$$

et, par suite, la condition d'intégrabilité est vérifiée.

Nous allons chercher si l'intégrale reste finie pour toute valeur du point analytique (x, y, z).

5. Ne considérons d'abord que des points à distance finie. Si (x, y, z) n'est pas un point double de la surface, il n'y a aucune difficulté, car le résultat apparaît immédiatement, en employant l'une ou l'autre des trois formes de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z(x, y, z)} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{(x, y, z)} \frac{-C\,dx + A\,dz}{f'_y(x, y, z)} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{(x, y, z)} \frac{C\,dy - B\,dz}{f'_x(x, y, z)}.$$

Supposons, en second lieu, que (x, y, z) tende vers un point double *isolé* (a, b, c) de la surface. On remarquera d'abord que les surfaces

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

passent par ce point; on a, en effet, en différentiant l'identité (α) par rapport à x, y et z, et faisant $x = a$, $y = b$, $z = c$,

$$\begin{aligned} A(a, b, c) f''_{a^2} + B(a, b, c) f''_{ab} + C(a, b, c) f''_{ac} &= 0, \\ A(a, b, c) f''_{ab} + B(a, b, c) f''_{b^2} + C(a, b, c) f''_{bc} &= 0, \\ A(a, b, c) f''_{ac} + B(a, b, c) f''_{bc} + C(a, b, c) f''_{c^2} &= 0; \end{aligned}$$

on en conclut que

$$A(a, b, c) = B(a, b, c) = C(a, b, c) = 0,$$

puisque le déterminant des dérivées secondes de f n'est pas nul au point abc, qui n'est pas un point biplanaire.

Posons

$$y = b + t(x - a),$$

t étant la variable que nous allons substituer à y, et soit

$$f(x, y, z) = \varphi(x - a, y - b, z - c) + \psi(x - a, y - b, z - c) + \ldots,$$

$\varphi, \psi, \ldots$ étant homogènes par rapport à $x - a$, $y - b$, $z - c$ et de degrés respectivement égaux à deux, trois, ..., et φ renfermant un terme en $(z - c)^2$; il en sera ainsi, si, ce qu'on peut supposer, les parallèles menées par (a, b, c) aux axes de coordonnées ne sont pas sur le cône.

De l'équation $f(x, y, z) = 0$ on déduira pour $z = c$ deux développements distincts ordonnés suivant les puissances croissantes de $x - a$, sauf pour les valeurs de t, telles que l'équation du second degré en θ

$$\varphi(1, t, \theta) = 0$$

ait une racine double ; ces valeurs de t sont évidemment au nombre de deux, et l'on peut les supposer finies, soient t_1 et t_2.

Ceci posé, t ayant une valeur variable, mais ne tendant pas vers t_1 ou t_2, l'expression

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

prendra la forme

$$\frac{(B - At)\,dx - A(x - a)\,dt}{f'_z}.$$

Or B et A contiennent en facteur $(x - a)$, et f'_z contient en facteur $(x - a)$, mais ne contient pas $(x - a)^2$. Il en résulte que l'intégrale tendra certainement vers une valeur finie, quand (x, y, z) tendra vers (a, b, c), de telle manière que le rapport $\frac{y - b}{x - a}$ ait une limite différente de t_1 ou t_2.

Il n'y a aucune difficulté à étudier le cas où le rapport $\frac{y - b}{x - a}$ tend vers t_1 ou t_2 ; il suffit, pour cela, d'employer une des autres formes de l'intégrale. Les plans parallèles aux plans de coordonnées passant par le point (a, b, c) pouvant être supposés non tangents au cône,

$$\varphi(x - a, y - b, z - c) = 0,$$

la difficulté qui se présentait relativement à x et y pris comme variables indépendantes ne se présentera plus avec x et z, puisqu'un plan tangent à la surface conique ne peut passer à la fois par l'axe des z et l'axe des y.

Nous voyons donc que, de quelque manière que le point x, y, z tende vers le point double (a, b, c), la valeur de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

reste finie. On voit, d'ailleurs, bien aisément que la valeur de cette intégrale est indépendante de la façon dont le point (x, y, z) se rapproche du point double. Soit, en effet, après un choix d'axes convenable, et l'origine étant au point double,

$$f(x, y, z) = Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + U(x, y, z),$$

les termes suivant les trois premiers étant de degré supérieur à deux, et l'on a

$$MNP \neq 0;$$

posons

$$A = ax + by + cz + \ldots,$$
$$B = a'x + b'y + c'z + \ldots,$$
$$C = a''x + b''y + c''z + \ldots;$$

l'identité

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z)$$

donne de suite cette autre identité

$$2(ax + by + cz)Mx + 2(a'x + b'y + c'z)Ny + 2(a''x + b''y + c''z)Pz$$
$$= (a + b' + c'')(Mx^2 + Ny^2 + Pz^2);$$

on en conclut immédiatement

$$a = b' = c'' = 0,$$
$$Mc + Pa'' = 0, \quad Mb + Na' = 0, \quad Nc' + Pb'' = 0.$$

Il viendra donc

$$B\,dx - A\,dy = z(c'\,dx - c\,dy) + a'x\,dx - by\,dy + \varphi\,dx + \psi\,dy,$$

φ et ψ étant au moins du second degré en x, y et z; l'élément de l'intégrale sera alors

$$\frac{z(c'\,dx - c\,dy) + a'x\,dx - by\,dy + \varphi\,dx + \psi\,dy}{2Pz + U'_z(x, y, z)};$$

or, d'après une des égalités précédentes $a' = \lambda M$, $b = -\lambda N$: nous pourrons donc mettre cette expression sous la forme

$$\frac{z(c'\,dx - c\,dy - \lambda P\,dz) + \varphi_1\,dx + \psi_1\,dy + \chi_1\,dz}{2Pz + U'_z(x, y, z)},$$

φ_1, ψ_1 et χ_1 étant au moins du second degré en x, y, z. Supposons maintenant que x et y tendent vers zéro, la limite de $\frac{y}{x}$ étant finie et n'annulant pas $M + N\left(\frac{y}{x}\right)^2$; dans cette hypothèse, $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ auront des limites finies, et le dernier élément de l'intégrale se réduira à

$$\frac{c'\,dx - c\,dy - \lambda P\,dz}{2P}.$$

Il est donc indépendant de la limite de $\frac{y}{x}$. En employant l'une ou l'autre forme de l'intégrale, on traiterait d'une manière toute semblable les cas exclus dans le raisonnement précédent.

6. Étudions maintenant la valeur de l'intégrale quand (x, y, z) se rapproche d'un point de la courbe double de la surface.

Nous allons joindre aux hypothèses précédemment faites la suivante. Les surfaces

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

passent par la courbe double de la surface. Je dis que, dans ces conditions, l'intégrale reste finie pour tout point de la courbe double.

Soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées d'un point P de la courbe double; par ce point passent deux nappes de la surface ayant, par hypothèse, deux plans tangents différents. Supposons que (x, y, z) tende vers P en restant sur une certaine nappe; le plan tangent à cette nappe en P n'est pas parallèle aux trois axes de coordonnées; supposons, pour fixer les idées, qu'il ne soit pas parallèle à l'axe des z.

Pour l'une des nappes, on aura, dans le voisinage de (x_1, y_1, z_1),

$$(1) \qquad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \varphi(x - x_1, y - y_1),$$

φ ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier.

Pour l'autre nappe, on aura pareillement

$$(2) \qquad z - z_1 = a'(x - x_1) + b'(y - y_1) + \psi(x - x_1, y - y_1),$$

et l'on n'a pas à la fois

$$a = a', \quad b = b'.$$

L'équation de la surface pourra évidemment se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = \mathrm{F} \times [z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1) - \varphi] \\ \times [z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1) - \psi], \end{aligned}$$

F dépendant de x, y, z et ayant une valeur finie et différente de zéro pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

On en conclut que, pour tout point xyz de la nappe (1), on aura

$$\begin{aligned} f'_z(x, y, z) = \mathrm{F} \times [(a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) \\ + \varphi(x - x_1, y - y_1) - \psi(x - x_1, y - y_1)]. \end{aligned}$$

L'équation de la projection de la courbe double sur le plan des xy est obtenue en éliminant z entre les équations (1) et (2), ce qui donne immédiatement

$$(3) \qquad (a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) + \varphi - \psi = 0.$$

On n'a pas à la fois $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, soit, par exemple, $b - b' \neq 0$.

Nous pourrons tirer de l'équation (3)

$$y - y_1 = \mathrm{P}(x - x_1),$$

P étant une série, sans terme constant, procédant suivant les puissances de $x - x_1$.

Ceci posé, soit

$$\mathrm{A}(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface passant par la courbe double, z étant rem-

placé par le développement (1), on aura, pour les points de la nappe (1) dans le voisinage de P,

$$A(x, y, z) = \chi(x - x_1, y - y_1),$$

et cette fonction sera identiquement nulle, quand on remplacera $y - y_1$ par $P(x - x_1)$.

On aura donc

$$A(x, y, z) = [y - y_1 - P(x - x_1)]\,\chi_1(x - x_1, y - y_1),$$

χ_1 étant, comme χ, une série procédant suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$; on remarquera, d'autre part, d'après ce qui a été dit plus haut, que

$$f'_z(x, y, z) = F_1 \times [y - y_1 - P(x - x_1)],$$

F_1 dépendant de x, y, z et étant *finie et différente de zéro* pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Si nous considérons maintenant le quotient

$$\frac{A(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)},$$

on voit, d'après ce qui précède, qu'il tendra vers une valeur finie déterminée quand (x, y, z) se rapprochera de P, en restant sur l'une ou l'autre nappe de la surface.

Il est facile maintenant de trouver ce que devient l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z(x, y, z)},$$

quand (x, y, z) tend vers (x_1, y_1, z_1). Les deux expressions

$$\frac{B}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{A}{f'_z}$$

étant déterminées et continues dans le voisinage de ce point, l'intégrale aura nécessairement une valeur *finie et déterminée*.

7. Il reste à étudier l'intégrale quand les variables deviennent infinies. Nous allons, dans ce but, transformer l'intégrale en nous servant des coordonnées homogènes. Remplaçons donc x, y, z par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, et rappelons-nous que nous avons trouvé (n° 5)

$$A = x\varphi(x, y, z) + A_1(x, y, z),$$
$$B = y\varphi(x, y, z) + B_1(x, y, z).$$

φ est homogène et de degré $(m-3)$ en x, y et z; A_1 et B_1 sont des polynômes de degré $m-3$ en x, y et z.

Nous aurons donc, en rendant les polynômes homogènes,

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z(x, y, z)} = \frac{\left\{\begin{aligned} &[y\varphi(x, y, z) + tB_1(x, y, z, t)](t\,dx - x\,dt)\\ -&[x\varphi(x, y, z) + tA_1(x, y, z, t)](t\,dy - y\,dt)\end{aligned}\right\}}{tf'_z(x, y, z, t)},$$

qui pourra s'écrire

$$\frac{-(x\,dy - y\,dx)(x\varphi + tA_1) + (A_1 y - B_1 x)(x\,dt - t\,dx)}{xf'_z(x, y, z, t)}.$$

x, y, z, t ne sont pas nulles à la fois; soit $x \neq 0$, et posons alors

$$\frac{y}{x} = Y, \quad \frac{z}{x} = Z, \quad \frac{t}{x} = T;$$

l'expression différentielle deviendra

$$\frac{-[\varphi(1, Y, Z) + TA_1(1, Y, Z, T)]\,dY + [YA_1(1, Y, Z, T) - B_1(1, Y, Z, T)]\,dT}{f'_Z(1, Y, Z, T)},$$

et nous sommes ramenés à étudier la valeur d'une intégrale de même forme que celle qui a été étudiée dans les numéros précédents et pour des valeurs finies des variables.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

L'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z(x, y, z)}$$

reste finie pour toute valeur, finie ou infinie, de x et y; elle est indéterminée quoique finie, pour les valeurs infinies données aux variables.

8. Nous savons donc reconnaître, étant donnée une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

si elle possède ou non des intégrales de différentielles totales de *première espèce*, en désignant ainsi les intégrales qui restent toujours finies.

Il n'en est pas ici comme dans le cas des courbes algébriques; *la surface la plus générale de degré m ne possède pas d'intégrales de première espèce*. En d'autres termes, étant considérée la surface la plus générale d'ordre m

$$f(x, y, z) = 0,$$

on ne peut pas trouver de polynômes A, B, C de la forme

$$\begin{aligned} A &= x\varphi(x, y, z) + A_1(x, y, z), \\ B &= y\varphi(x, y, z) + B_1(x, y, z), \\ C &= z\varphi(x, y, z) + C_1(x, y, z), \end{aligned}$$

où φ est un polynôme d'ordre $m - 3$ et homogène en x, y, z, et A_1, B_1, C_1 sont des polynômes de degré au plus égal à $m - 3$ par rapport à ces variables, qui satisfassent à l'identité

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z).$$

C'est ce que nous allons montrer dans un instant, mais écrivons auparavant l'identité précédente sous une autre forme. Il ne paraît pas facile d'énoncer, sous forme géométrique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse satisfaire à cette identité fondamentale. Transformons-la seulement pour lui donner une forme plus symétrique.

On peut l'écrire

$$mAf'_x + mBf'_y + mCf'_z = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)(xf'_x + yf'_y + zf'_z + f'_t).$$

Posons maintenant

$$\theta_1 = mA - x\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

$$\theta_2 = mB - y\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

$$\theta_3 = mC - z\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

$$\theta_4 = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

les θ étant ainsi des polynômes d'ordre $m-3$, comme on le reconnaît, en se reportant aux formes de A, B, C.

L'identité pourra s'écrire

$$(1) \qquad \theta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Considérons les θ comme des polynômes homogènes d'ordre $m-3$ en x, y, z, t. On aura entre ces polynômes la relation suivante qui résulte immédiatement de leur expression en A, B, C :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = 0.$$

Nous avons dit que la surface la plus générale de degré m ne possédait pas d'intégrale de première espèce. Je dis, en effet, que, $f(x, y, z)$ étant le polynôme général d'ordre m, on ne peut pas trouver quatre polynômes θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 de degré $(m-3)$ vérifiant l'identité (1). Considérons, en effet, les trois surfaces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

elles n'ont pas de courbe commune, et elles ont en commun un nombre de points distincts égal à $(m-1)^3$. Pour ces points, on a

$$\theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

mais le second facteur ne sera certainement pas nul, puisqu'alors la surface aurait des points doubles; les points considérés appartiennent donc à la surface de degré $m-3$

$$\theta_4 = 0;$$

par suite, les quatre surfaces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \theta_4 = 0$$

ont en commun $(m-1)^3$ points distincts. Or cela est impossible, car, si nous considérons les deux surfaces de degré $m-1$

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

les α, β, γ étant des constantes arbitraires, l'intersection de ces deux surfaces devrait rencontrer la surface θ_4 en $(m-1)^3$ points. Il est, d'ailleurs, impossible que les deux surfaces précédentes aient une ligne commune avec la surface θ_4, si les α, β, γ sont pris arbitrairement.

CHAPITRE II.

1. Nous avons admis, dans les numéros précédents, que la surface n'avait que des points doubles isolés et des courbes doubles. On peut supposer, sans plus de complications, qu'elle a des points multiples et des courbes multiples d'ordre quelconque, pourvu que ces singularités soient *des singularités ordinaires;* nous entendrons par là qu'en un point multiple isolé d'ordre k le cône d'ordre k formé par les tangentes n'a pas de droites multiples; de même, en tout point d'une courbe multiple d'ordre k, les k plans tangents aux k nappes de la surface passant par la courbe multiple sont distincts.

Cherchons alors comment devront être modifiés les énoncés précédemment donnés pour que la surface possède des intégrales de première espèce. Soient A, B, C trois polynômes des degrés indiqués, sa-

tisfaisant à l'identité fondamentale

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)f(x,y,z).$$

Les surfaces $A=0$, $B=0$, $C=0$ passeront par les courbes multiples, et une courbe multiple d'ordre k de la surface proposée sera, pour chacune de ces surfaces, une courbe multiple d'ordre $(k-1)$. Ces conditions sont, d'ailleurs, nécessaires et suffisantes, pour que l'intégrale

$$\int^{x,y,z}\frac{B\,dx-A\,dy}{f_z}$$

reste *finie*, en tout point d'une courbe multiple.

L'étude de la valeur de l'intégrale, quand (x,y,z) tend vers un point multiple isolé, est un peu moins simple. Supposons que ce point multiple soit à l'origine des coordonnées. Soit ce point d'ordre p, et écrivons

$$f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)+\ldots,$$

$\varphi(x,y,z)$ étant homogène et de degré p, et les autres termes étant de degré supérieur à p en x, y et z. Soient de même α, β et γ les termes homogènes et de degré moindre en x, y, z dans A, B et C; on aura l'identité

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\varphi(x,y,z);$$

arrêtons-nous un instant sur cette relation. En la joignant à

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=p\varphi,$$

nous aurons l'identité

$$\begin{aligned}0=\;&\left[p\alpha-x\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\&+\left[p\beta-y\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\&+\left[p\gamma-z\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas *a priori* le degré de α, β, γ; si ce degré est au plus égal à $p-2$, nous allons immédiatement trouver la forme de ces polynômes; nous avons, en effet, dans ce cas, une relation de la forme

$$(1)\qquad P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

où P, Q, R sont des polynômes homogènes dont le degré est au plus égal à $p-2$. Les points communs à $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ et à $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ doivent appartenir à la courbe $P=0$, puisqu'on ne peut avoir en même temps $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, le cône n'ayant pas de génératrice multiple. Or les points communs aux deux courbes de degré $p-1$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

ne peuvent appartenir à la courbe de degré $p-2$

$$P=0,$$

et nous concluons de là que P, Q et R doivent être identiquement nuls. On a, par suite,

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}.$$

Soit T la valeur commune de ces rapports; on aura

$$pT=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right),$$

ce qui montre d'abord que T sera un polynôme homogène en x, y, z. De plus, soit q son degré; l'égalité précédente nous donnera

$$pT=qT+3T,$$

d'où

$$q=p-3.$$

Ainsi, si le degré de α, β, γ n'atteint pas $p-1$, on aura nécessairement

$$\alpha=xT,\quad \beta=yT,\quad \gamma=zT,$$

T étant un polynôme de degré $p-3$. Nous sommes donc assuré que *les surfaces*

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0$$

ont un point multiple d'ordre au moins égal à $(p-2)$, *en un point multiple isolé d'ordre* p *de la surface proposée. Dans le cas où l'ordre de multiplicité est* $(p-2)$, *les termes de degré* $(p-2)$ *dans* A, B, C *ont les formes spéciales qui viennent d'être indiquées.*

2. Il est facile de voir maintenant que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\int^{x,y,z}\frac{B\,dx-A\,dy}{f'_z}$$

reste finie au point multiple considéré; nous supposons, comme plus haut, que ce point multiple est l'origine.

Si l'origine est un point multiple d'ordre $(p-1)$ pour les surfaces

$$B=0,\quad A=0,$$

il n'y a aucune modification à faire au raisonnement qui a été fait pour le cas du point double (n° 5).

Si l'origine est seulement un point multiple d'ordre $p-2$, nous pouvons poser, d'après ce qui vient d'être dit au numéro précédent,

$$A=xT+A_1,\quad B=yT+B_1,$$

A_1 et B_1 ne renfermant que des termes de degré supérieur à $p-2$; on a alors la somme des deux intégrales

$$\int\frac{T(y\,dx-x\,dy)}{f'_z}+\int\frac{B_1\,dx-A_1\,dy}{f'_z}.$$

Nous venons de dire que la seconde restait finie; quant à la première, elle est comparable à l'intégrale abélienne ordinaire

$$\int\frac{T\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'_z\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)}$$

attachée à la courbe $\varphi(x, y, z) = 0$; et cette intégrale reste finie, puisque T est un polynôme de degré $p - 3$.

Il résulte évidemment du calcul précédent qu'en un point multiple isolé d'ordre p (p étant supérieur à deux), l'intégrale de différentielle totale de première espèce peut avoir, tout en restant *finie*, une valeur *indéterminée*.

Il n'en était pas de même en un point double non planaire; nous avons vu (n° 5, Ire Partie) que, dans ce cas, l'intégrale avait toujours une valeur *déterminée*.

5. Nous ferons maintenant quelques remarques relatives au cas où la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

possède deux ou plus d'intégrales de première espèce. Considérons donc deux de ces intégrales.

A, B, C et A_1, B_1, C_1 étant les polynômes correspondants, nous aurons les deux identités

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

$$A_1\frac{\partial f}{\partial x} + B_1\frac{\partial f}{\partial y} + C_1\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) f(x, y, z).$$

Supposons que les deux intégrales

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

ne sont pas fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on n'a pas pour tous les points de la surface

$$BA_1 - AB_1 = 0,$$

Ceci entendu, nous avons pour tout point de la surface

$$A f'_x + B f'_y + C f'_z = 0,$$

$$A_1 f'_x + B_1 f'_y + C_1 f'_z = 0.$$

ou

$$(1)\qquad \frac{AB_1 - A_1B}{f'_z} = \frac{BC_1 - CB_1}{f'_x} = \frac{CA_1 - AC_1}{f'_y}.$$

Le quotient $\frac{AB_1 - A_1B}{f'_z}$ reste fini pour tout point (x, y, z) de la surface, situé à distance finie. D'après les égalités précédentes, ceci est évident pour les points simples de la surface, il en est aussi de même pour les points des lignes multiples, car toute ligne multiple d'ordre p de la surface proposée est ligne multiple d'ordre $2p-2$ des surfaces

$$AB_1 - A_1B = 0, \quad BC_1 - CB_1 = 0, \quad CA_1 - AC_1 = 0.$$

Faisons enfin coïncider (x, y, z) avec un point P multiple isolé d'ordre p. Si les surfaces

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

ont le point P pour point multiple d'ordre $p-2$, on voit, d'après les formes des polynômes A, B, C (numéro précédent), que les surfaces

$$AB_1 - A_1B = 0, \quad BC_1 - CB_1 = 0, \quad CA_1 - AC_1 = 0$$

ont le point P pour point multiple d'ordre $(2p-3)$, et dans tous les autres cas le degré de multiplicité atteindra au moins cette valeur; on voit alors, d'après les égalités (1), que chacune des expressions (1) s'annule au point P.

De ce que chacun des rapports (1) reste fini pour tout point (x, y, z) de la surface, situé à distance finie, on conclut que

$$(2)\qquad \begin{cases} AB_1 - A_1B = f'_z\, Q(x, y, z), \\ BC_1 - CB_1 = f'_x\, Q(x, y, z), \\ CA_1 - AC_1 = f'_y\, Q(x, y, z), \end{cases}$$

$Q(x, y, z)$ étant un *polynôme* en x, y, z. Le degré de ce polynôme sera d'ailleurs $(m-4)$ (m étant le degré de la surface f); on voit en effet, en se reportant aux formes de A, B, C, que les polynômes figurant

dans les premiers membres des relations précédentes sont de degré $2m-5$.

On pourrait arriver aux relations (2) par une autre voie. La surface

$$AB_1 - A_1 B = 0$$

passera par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'_z(x, y, z) = 0;$$

or, si une surface

$$F(x, y, z) = 0$$

passe par l'intersection de deux surfaces

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

et que toute courbe d'intersection de ces deux dernières surfaces, qui est pour la première une ligne multiple d'ordre i et pour la seconde d'ordre k, soit une ligne multiple d'ordre $i+k-1$ pour la surface F, on aura l'identité

$$F \equiv Q\varphi + R\psi,$$

Q et R étant des polynômes. Cette importante proposition est due à M. Nöther (*Math. Annalen*, t. VI). En l'appliquant à l'exemple actuel, on est conduit à l'identité

$$AB_1 - A_1 B = Qf'_z + Rf,$$

et l'on a, par suite, les relations (2) pour les points de la surface f.

La surface d'ordre $(m-4)$

$$Q(x, y, z) = 0$$

est extrêmement intéressante, car c'est une surface *adjointe* à la surface proposée; cette surface, d'après la définition du polynôme Q, aura en effet *pour courbe multiple d'ordre $p-1$ une courbe multiple d'ordre p de la surface f, et elle aura pour point multiple d'ordre au moins égal à $(p-2)$ tout point multiple isolé d'ordre p de cette même surface.*

Le polynôme *adjoint* Q est donc tel que l'intégrale double

$$\int^x \int^y \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

reste finie pour toute valeur de x et y.

Dans le cas où la surface a un point double isolé ($p = 2$), la surface précédente Q passe par ce point double; car les surfaces

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

passent par ce point double. La surface adjointe d'ordre $(m - 4)$

$$Q(x, y, z) = 0$$

présente donc, dans ce cas, une particularité qui n'appartient pas en général aux surfaces adjointes, car celles-ci ne sont pas assujetties à passer par les points doubles isolés.

4. Nous allons considérer maintenant quelques exemples particuliers. Les surfaces du *second* degré étant unicursales, il n'y aura évidemment parmi elles aucune surface qui possède des intégrales de première espèce. La même remarque s'applique aux surfaces du *troisième* degré qui sont toutes unicursales; il y a seulement une exception pour les cônes du troisième degré, qui ne sont pas des surfaces unicursales et qui possedent une intégrale de différentielle totale de première espèce; car soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'un cône du troisième degré ayant pour sommet l'origine, l'intégrale

$$\int \frac{x\, dy - y\, dx}{f'_z(x, y, z)}$$

sera de première espèce.

Passons aux surfaces du quatrième degré. Une telle surface pourra posséder une intégrale de première espèce, mais nous allons immédiatement établir qu'*elle ne pourra avoir deux intégrales qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre*.

En effet, nous aurions ici, d'après ce que nous avons vu (n° 5 de ce Chapitre),

$$AB_1 - A_1B - Qf'_z = 0,$$
$$BC_1 - CB_1 - Qf'_x = 0,$$
$$CA_1 - AC_1 - Qf'_y = 0.$$

Q, qui est en général d'ordre $(m-4)$, sera ici une constante; ces relations ne sont, en général, satisfaites que pour les points de la surface f; mais, dans le cas actuel, ce seront des identités, puisque le premier membre de chacune d'elles est un polynôme de degré inférieur à quatre. D'ailleurs la constante Q sera différente de zéro, puisque les deux intégrales ne sont pas fonctions l'une de l'autre. Nous avons donc l'identité

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = 0;$$

par suite, on a cette autre identité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Reportons-nous maintenant aux conditions mises sous forme homogène, pour que la surface ait une intégrale de première espèce (n° 8, Ire Partie); on a

$$\theta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

et θ_4 a pour expression

$$\theta_4 = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right):$$

on aura par conséquent $\theta_4 = 0$; mais θ_4 est un quelconque des polynômes θ, et nous arrivons ainsi à cette conclusion absurde que

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0.$$

L'hypothèse faite qu'il y avait deux intégrales de première espèce qui n'étaient pas fonctions l'une de l'autre était donc inadmissible.

5. Le même théorème subsiste pour les surfaces du cinquième degré. Soit une surface qui aurait deux intégrales distinctes de première espèce; on aurait

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
& A f'_x + B f'_y + C f'_z = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z), \\
& A_1 f'_x + B_1 f'_y + C_1 f'_z = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) f(x, y, z),
\end{aligned}
\right.
$$

et les formes des A, B, C seront ici

$$
\begin{aligned}
A &= x\varphi(x, y, z) + L(x, y, z), & A_1 &= x\varphi_1(x, y, z) + L_1(x, y, z), \\
B &= y\varphi(x, y, z) + M(x, y, z), & B_1 &= y\varphi_1(x, y, z) + M_1(x, y, z), \\
C &= z\varphi(x, y, z) + N(x, y, z), & C_1 &= z\varphi_1(x, y, z) + N_1(x, y, z),
\end{aligned}
$$

les φ étant un polynôme homogène du second degré, et les L, M, N des polynômes du même degré

D'après ce qui a été dit au n° **5**, on aura nécessairement

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
& AB_1 - BA_1 = Q f'_z + \nu f(x, y, z), \\
& BC_1 - CB_1 = Q f'_x + \lambda f(x, y, z), \\
& CA_1 - AC_1 = Q f' + \mu f(x, y, z),
\end{aligned}
\right.
$$

Q étant ici un polynôme du premier degré, et λ, μ, ν étant trois constantes. Des trois identités précédentes, on conclut, en tenant compte des équations (1),

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
& Q\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \lambda A + \mu B + \nu C = 0, \\
& Q\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) + \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les constantes λ, μ, ν sont reliées très simplement au polynôme Q. Supposons, en effet, que les polynômes φ et φ_1 ne soient pas identiquement nuls à la fois. Soit $\varphi = 0$. Dans la première des équations (4), les termes du degré le plus élevé seront, en posant

$$
Q = lx + my + nz + p,
$$

$$
5(lx + my + nz)\varphi + (\lambda x + \mu y + \nu z);
$$

on en conclut que

$$\lambda = -5\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \mu = -5\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \nu = -5\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

La même conclusion subsiste si φ et φ_1 sont identiquement nuls. Considérons en effet, dans ce cas, les relations (2); les premiers membres sont du quatrième degré; on aura donc, en désignant par $\psi(x, y, z)$ les termes homogènes du cinquième degré dans f,

$$\begin{aligned}
(lx + my + nz)\psi'_z + \nu\psi &= 0,\\
(lx + my + nz)\psi'_x + \lambda\psi &= 0,\\
(lx + my + nz)\psi'_y + \mu\psi &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\psi'_z}{\nu} = \frac{\psi'_x}{\lambda} = \frac{\psi'_y}{\mu} = -\frac{\psi}{lx + my + nz};$$

donc

$$5(lx + my + nz) = -(\lambda x + \mu y + \nu z),$$

et la conclusion précédente subsiste.

Ceci posé, on peut, en faisant un changement d'axes, supposer que le polynôme du premier degré Q se réduise à z; les équations se simplifieront. Écrivons les équations (2)

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned}
AB_1 - BA_1 &= zf'_z - 5f(x, y, z),\\
BC_1 - CB_1 &= zf'_x,\\
CA_1 - AC_1 &= zf'_y,
\end{aligned}\right.$$

et les équations (3) deviennent

$$z\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) - 5C = 0,$$

$$z\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) - 5C_1 = 0.$$

Nous avons pour A, B, C et A_1, B_1, C_1 les expressions indiquées plus haut.

En les introduisant, les deux dernières équations deviennent

$$z\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)-5\,N=0,$$

$$z\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial M_1}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial z}\right)-5\,N_1=0.$$

Si donc nous posons

$$L=a_0z^2+a_1z+a_2,$$

$$M=b_0z^2+b_1z+b_2,$$

où les a et b sont des polynômes en x et y, de degré marqué par l'indice, on aura

$$N=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)z^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}+\frac{\partial b_2}{\partial y}\right)z,$$

et, de même, en posant

$$L_1=a'_0z^2+a'_1z+a'_2,$$

$$M_1=b'_0z^2+b'_1z+b'_2,$$

il viendra

$$N_1=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a'_1}{\partial x}+\frac{\partial b'_1}{\partial y}\right)z^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial a'_2}{\partial x}+\frac{\partial b'_2}{\partial y}\right)z;$$

et soit en outre

$$\varphi(x,y,z)=c_0z^2+c_1z+c_2,$$

$$\varphi_1(x,y,z)=c'_0z^2+c'_1z+c'_2,$$

où les c sont des polynômes homogènes en x, y, z de degré marqué par l'indice.

Ceci posé, la première des équations (4) donne

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{z^5}\right)=\frac{AB_1-A_1B}{z^6}.$$

Nous allons tirer de cette dernière équation la valeur de f, à un terme près de la forme Cz^5, où C sera une constante, car elle ne peut être une fonction de x et y, f devant être un polynôme du cinquième degré en x, y et z.

f étant ainsi déterminé, on devra avoir, d'après les équations (4),

$$f'_x = \frac{BC_1 - CB_1}{z}, \quad f'_y = \frac{CA_1 - AC_1}{z}.$$

6. Ceci posé, la surface, étant nécessairement du genre un, devra nécessairement avoir une courbe double d'un degré au moins égal à deux, et l'on peut évidemment supposer que cette courbe double est la conique représentée par les équations

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

car on se rappelle que toute ligne multiple appartient à la surface $Q = 0$.

D'ailleurs les surfaces

$$A = 0, \quad A_1 = 0, \quad B = 0, \quad B_1 = 0$$

doivent passer pour cette conique; donc les polynômes

$$c_2 x + a_2, \; c_2 y + b_2, \; c'_2 x + a'_2, \; c'_2 y + b'_2$$

doivent être divisibles par $x^2 + y^2 + 1$. Soit donc

$$(5) \quad \begin{cases} c_2 x + a_2 = (\alpha x + \beta)(x^2 + y^2 + 1), \\ c_2 y + b_2 = (\alpha y + \gamma)(x^2 + y^2 + 1), \\ c'_2 x + a'_2 = (\alpha' x + \beta')(x^2 + y^2 + 1), \\ c'_2 y + b'_2 = (\alpha' y + \gamma')(x^2 + y^2 + 1), \end{cases}$$

les α, β, γ étant des constantes; on peut en tirer a_2, b_2, c_2 et a'_2, b'_2, c'_2.

Dans $f(x, y, z)$, le terme indépendant de z sera

$$-\tfrac{1}{5}[(c_2 x + a_2)(c'_2 y + b'_2) - (c_2 y + b_2)(c'_2 x + a'_2)]$$

ou

$$(6) \quad -\tfrac{1}{5}(x^2 + y^2 + 1)^2 [x(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + y(\beta\alpha' - \beta'\alpha) + \beta\gamma' - \beta'\gamma].$$

Cherchons, d'autre part, le terme indépendant de z dans $\frac{BC_1 - CB_1}{z}$;

ce sera

$$(c_2 y + b_2)\left[c'_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial a'_2}{\partial x} + \frac{\partial b'_2}{\partial y}\right)\right] - (c'_2 y + b'_2)\left[c_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y}\right)\right],$$

ou, en remplaçant les a_2, b_2, c_2 par leur valeur tirée des identités (5),

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+1)[x^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + \tfrac{1}{2}y^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)xy + \tfrac{1}{2}(\beta'\gamma - \gamma'\beta)x + \tfrac{1}{2}(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)].\end{aligned}\right.$$

L'expression (7) doit être la dérivée par rapport à x de l'expression (6); or cela n'est possible que si

$$\alpha'\gamma - \alpha\gamma' = \alpha\beta' - \alpha'\beta = \beta'\gamma - \gamma'\beta = 0;$$

dans ces conditions, l'expression (6) est nulle, et il en résulte que $f(x, y, z)$ serait divisible par z; la surface se décomposerait, ce qui montre l'*impossibilité de l'existence de deux intégrales distinctes de première espèce pour une surface du cinquième degré.*

TROISIÈME PARTIE.

Nous allons nous occuper, dans ce Chapitre, d'une classe particulière de surfaces; supposons que les coordonnées d'un point quelconque x, y, z de la surface

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0$$

s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v

$$x = F(u, v),\quad y = F_1(u, v),\quad z = F_2(u, v),$$

ces fonctions ayant quatre *paires* de périodes simultanées. Supposons de plus qu'à un point *quelconque* (x, y, z) de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de u et v, abstraction faite de multiples des périodes; *dans ce cas, la surface* (1) *possédera deux intégrales de première espèce et deux seulement.* On le démontre immédiatement de la manière suivante :

Nous avons

$$dx = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial F_1}{\partial u} du + \frac{\partial F_1}{\partial v} dv.$$

Or les coefficients de du et dv sont des fonctions quadruplement périodiques de u et v; elles peuvent donc s'exprimer rationnellement en x, y, z, dans l'hypothèse faite qu'à un point quelconque (x, y, z) ne correspond qu'un seul système de valeurs (u, v); en résolvant les deux équations précédentes par rapport à du et dv, nous aurons donc

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$

$$dv = P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

les P et Q étant des fonctions rationnelles de (x, y, z). Les deux intégrales

$$\int P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int P_1\,dx + Q_1\,dy$$

sont évidemment des intégrales de différentielles totales algébriques, et elles sont de première espèce, puisqu'à tout point (x, y, z) doivent nécessairement correspondre des valeurs finies de u et v. Ces deux intégrales sont distinctes et linéairement indépendantes.

En second lieu, il n'existe pas d'intégrale de première espèce, linéairement indépendante des deux précédentes. Soit, en effet, comme plus haut,

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

une troisième intégrale de première espèce; considérons les expressions

$$\varphi = \frac{B\frac{\partial x}{\partial u} - A\frac{\partial y}{\partial u}}{f'_z} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{B\frac{\partial x}{\partial v} - A\frac{\partial y}{\partial v}}{f'_z};$$

ces expressions devront rester finies pour toute valeur de u et v, sinon l'intégrale précédente, qui peut s'écrire $\int \varphi\,du + \psi\,dv$, ne resterait pas toujours finie. Les fonctions quadruplement périodiques φ et ψ, res-

tant toujours finies, se réduisent, par conséquent, à des constantes. On peut donc écrire

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = \alpha\,du + \beta\,dv,$$

α et β étant deux constantes, ce qui démontre le théorème.

2. Parmi les surfaces du quatrième degré, il en est une bien remarquable, dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres : c'est la surface de Kummer; mais le théorème précédent ne peut pas lui être appliqué, car, si nous appelons u et v les deux paramètres, à un point *quelconque* de la surface correspondent *deux* systèmes distincts de valeurs (u, v). Pour vérifier cette assertion, appuyons-nous sur un élégant théorème, démontré par M. Darboux (*Comptes rendus*, 27 juin 1881). M. Darboux établit que l'on peut toujours faire correspondre point par point une surface de Kummer à une surface ayant une équation de la forme

$$(1) \qquad z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme du sixième degré en x, y, et la courbe

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

se composant de six droites tangentes à une même conique.

On peut toujours, par une transformation préalable, faire en sorte que cette conique ait pour équation

$$(K) \qquad x^2 - y = 0.$$

Posons maintenant

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = x_1 x_2.$$

Pour une valeur fixe arbitraire donnée à x_1, ces deux équations définissent une droite tangente à la conique (K). Supposons que les six

droites données par l'équation (2) correspondent à

$$x_1 = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.$$

Soient maintenant

$$y_1^2 = (x_1 - a_1)(x_1 - a_2)\ldots(x_1 - a_6),$$
$$y_2^2 = (x_2 - a_1)(x_2 - a_2)\ldots(x_2 - a_6);$$

le produit $y_1^2 y_2^2$, qui est une fonction symétrique de x_1 et x_2, est un polynôme du sixième degré en x et y; il s'annule pour

$$x_1 = a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_6;$$

quel que soit x_2, il ne diffère donc du polynôme $f(x, y)$ que par un facteur constant que l'on peut bien supposer être l'unité.

Par suite, nous satisfaisons à l'équation (1) en posant

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$
$$y = x_1 x_2,$$
$$z = y_1 y_2,$$

où

$$y_1 = \sqrt{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_6)}, \quad y_2 = \sqrt{(x_2 - a_1)\ldots(x_2 - a_6)}.$$

Si nous considérons maintenant les équations abéliennes

$$\int^{x_1} \frac{dx_1}{y_1} + \int^{x_2} \frac{dx_2}{y_2} = u,$$
$$\int^{x_1} \frac{x_1\, dx_1}{y_1} + \int^{x_2} \frac{x_2\, dx_2}{y_2} = v,$$

ces équations nous donnent pour $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ et $y_1 y_2$ des fonctions abéliennes de u et v. Les trois coordonnées x, y, z s'expriment donc par des fonctions abéliennes de deux paramètres.

Suppose-t-on maintenant donné un point (x, y, z) *quelconque* de la surface, on aura alors un système de valeurs (x_1, x_2) et le produit $y_1 y_2$. On aura donc pour y_1 et y_2 deux systèmes de valeurs, soit

$$y_1, \; y_2 \; \text{et} \; -y_1, \; -y_2;$$

on voit qu'alors à un point (x, y, z) de la surface *correspondent deux systèmes de valeurs* (u, v).

5. Revenons maintenant aux surfaces dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, et proposons-nous la question suivante : Étant donnée l'équation irréductible

$$f(x, y, z) = 0,$$

peut-on exprimer x, y, z par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, avec cette condition qu'à un point quelconque de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs des deux paramètres?

Nous supposons, comme dans le premier Chapitre, que la surface n'a que des singularités ordinaires (n° **1**, Chap. II); nous nous bornons même, pour abréger, au cas où la surface n'aurait que des points doubles et des courbes doubles; d'ailleurs, il est entendu qu'on a commencé par faire sur les variables la substitution homographique la plus générale.

Il devra tout d'abord exister deux intégrales de première espèce linéairement indépendantes et deux seulement : c'est un premier point qu'on aura à vérifier, en procédant comme il a été indiqué dans le premier Chapitre. Supposons donc que ces deux intégrales soient obtenues, et désignons-les par

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}, \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}.$$

Elles doivent, de plus, ne pas être fonction l'une de l'autre, c'est-à-dire que $BA_1 - AB_1$ n'est pas identiquement nul.

Considérons maintenant les équations différentielles

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du, \\[2ex] \dfrac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv; \end{cases}$$

ces équations devront donner pour x et y des fonctions uniformes de

u et v : c'est ce que l'on voit aisément d'après ce qui a été dit plus haut, puisque, dans le cas où x, y, z peuvent s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques de u et v, on a (nº **1**, Part. II)

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = \alpha\,du + \beta\,dv$$

et de même

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = \alpha_1\,du + \beta_1\,dv,$$

les α et β étant des constantes. Si nous remplaçons donc $\alpha u + \beta v$ et $\alpha_1 u + \beta_1 v$ par u et v, nous avons le système des équations (1).

Nous devons donc chercher *si ce système d'équations aux différentielles totales admet pour intégrales des fonctions uniformes des deux variables indépendantes u et v.*

Arrêtons-nous d'abord un instant sur le genre de la surface proposée

$$f(x, y, z) = 0.$$

Si les coordonnées d'un quelconque de ses points s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres et de la manière indiquée, *le genre de cette surface devra être égal à l'unité.* On le démontre de suite en remarquant que l'intégrale double

$$\int\int du\,dv$$

est de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

φ étant une fonction rationnelle de x, y, z. Il y a donc une intégrale de cette forme, qui reste finie pour toute valeur de x et y; on sait, d'ailleurs, que φ sera nécessairement de la forme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

Q désignant un polynôme d'ordre $m - 4$. De plus, l'expression

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z},$$

étant une fonction quadruplement périodique qui reste finie pour toute valeur de u et v, se réduit à une constante; désignons cette constante par a. Rappelons enfin que la surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par la courbe double de la surface.

4. Ces préliminaires posés, reprenons les deux équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

et tirons de ces équations les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, afin de former $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$; on obtient de suite

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{(f'_z)^2}{BA_1 - AB_1}.$$

Si nous rapprochons cette expression de la relation

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z} = a,$$

nous avons

$$(1) \qquad \frac{BA_1 - AB_1}{f'_z} = -\frac{1}{a} Q(x, y, z),$$

relation qui ne sera, d'ailleurs, une identité qu'en vertu de l'équation de la surface. Nous avons vu, d'autre part (nº **3**, Chap. II), que

$$(2) \qquad \frac{BA_1 - AB_1}{f'_z} = \frac{BC_1 - CB_1}{f'_x} = \frac{CA_1 - AC_1}{f'_y} = R(x, y, z),$$

$R(x, y, z)$ étant un polynôme d'ordre $(m - 4)$. Des relations (1) et (2),

on conclut

$$R(x,y,z) = -\frac{1}{a} Q(x,y,z),$$

et cette égalité a lieu pour toute valeur de x, y et z.

Des trois valeurs que l'on peut donner à R, il résulte que la surface $R = 0$ passe par les points doubles isolés; en effet, nous avons vu (Chap. I, n° 5) que

$$\frac{B}{f'_z} \text{ et } \frac{A}{f'_z}$$

tendent vers une limite finie quand (x, y, z) se rapproche d'un point double isolé (a, b, c), du moins quand $\frac{y-b}{x-a}$ ne tend pas vers deux certaines valeurs particulières. On a, par conséquent, $R(a,b,c) = 0$, puisque A_1 et B_1 s'annulent pour les coordonnées du point double.

5. Nous avons maintenant à étudier les deux équations aux différentielles totales

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

et à chercher à quelles conditions elles donneront pour x et y des fonctions uniformes de u et v. On peut écrire les deux équations précédentes sous la forme

$$dx = \frac{-A_1\,du + A\,dv}{R(x,y,z)},$$

$$dy = \frac{-B_1\,du + B\,dv}{R(x,y,z)}.$$

En tout point de la surface, situé à distance finie, et pour lequel $R(x,y,z)$ est différent de zéro, chacun des multiplicateurs de du et dv a une valeur finie parfaitement déterminée.

Nous devons chercher les valeurs pour lesquelles les fonctions x et y, définies par les deux équations aux différentielles totales précédentes, pourraient cesser d'être des fonctions uniformes de u et v. On sait, d'après une proposition générale due à M. Bouquet (*Bulletin des*

Sciences mathématiques, t. III), que x et y ne cesseront pas d'être des fonctions holomorphes de u et v, tant que les coefficients de du et dv seront des fonctions holomorphes de x et y.

Les points communs à la surface proposée et à la surface

$$R(x, y, z) = 0$$

joueront un rôle important dans la discussion qui va suivre, puisque, pour ces points, le dénominateur commun de dx et dy s'annulera. L'intersection de ces deux surfaces se composera d'abord des courbes doubles de la surface f, et il pourra y avoir, en outre, une ou plusieurs autres courbes d'intersection; désignons par Γ ces courbes complémentaires.

Ne considérons, pour le moment, que les points de la surface situés à distance finie, et prenons d'abord les points *simples* en dehors des courbes Γ. Si, pour un pareil point (x, y, z), on n'a pas $f'_z = 0$, il est clair que

$$\frac{A}{R}, \quad \frac{A_1}{R}, \quad \frac{B}{R}, \quad \frac{B_1}{R}$$

seront des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage de ce point. Il n'en est plus ainsi si $f'_z = 0$, mais la difficulté n'est qu'apparente. Le point étant simple, f'_x et f'_y ne seront pas nuls simultanément; soit $f'_x \neq 0$.

Des équations

$$dx = \frac{-A_1\,du + A\,dv}{R(x, y, z)}, \quad dy = \frac{-B_1\,du + B\,dv}{R(x, y, z)},$$

auxquelles j'associe

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0,$$

on tire

$$dy = \frac{-B_1\,du + B\,dv}{R},$$

$$dz = \frac{-C_1\,du + C\,dv}{R},$$

les polynômes C et C_1 étant ceux qui ont été considérés (Chap. Ier, n° **2**).

x étant ici fonction holomorphe de y et z, puisque $f'_x \neq 0$, nous concluons des deux dernières équations que y et z sont fonctions holomorphes de u et v, et, par suite, il en est de même de x, d'après l'équation

$$dx = -\frac{f'_y}{f'_x}dy - \frac{f'_z}{f'_x}dz.$$

Donc, tant que le point (x, y, z), restant à distance finie, ne vient pas sur la surface

$$R(x, y, z) = 0,$$

x et y ne cessent pas d'être des fonctions holomorphes de u et v.

6. Nous n'aurons encore aucune difficulté quand (x, y, z), restant toujours à distance finie, s'approche d'un point A de la courbe double, qui n'appartient pas aux courbes complémentaires Γ. D'après cette hypothèse, la surface R ne sera tangente en A à aucune des deux nappes de la surface passant en ce point.

Si la nappe de la surface, sur laquelle le point (x, y, z) s'approche de A, n'a pas son plan tangent en ce point parallèle à l'axe des z, ce qu'on peut toujours supposer d'après le numéro précédent, les coefficients de du et dv seront des fonctions holomorphes de x et y, et, par suite, x et y seront des fonctions holomorphes de u et v dans le voisinage des valeurs correspondantes de ces variables.

7. Nous avons maintenant à considérer le cas où (x, y, z) s'approcherait d'une courbe complémentaire Γ. Soit M un point quelconque d'une telle courbe; d'après les équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

on voit que le rapport $\frac{du}{dv}$ est indépendant de $\frac{dy}{dx}$, quand (x, y, z) s'approche de M, car on a, au point M,

$$AB_1 - A_1B = 0.$$

Donc les valeurs u_0, v_0 des intégrales u et v correspondant au poin[t] ne donnent pas pour les fonctions x et y un point ordinaire; ceci n'[est] pas douteux, puisque x et y ne pourront tendre vers x_0 et y_0, que [si] la limite du rapport $\frac{u-u_0}{v-v_0}$ a une valeur déterminée.

Si donc les équations précédentes sont satisfaites par des fonctio[ns] analytiques uniformes de u et v, le point (u_0, v_0) sera pour ces foncti[ons] un point d'indétermination. Mais, quand M se déplacera sur la courbe [Γ,] le système de valeurs (u_0, v_0) ne peut pas varier d'une manière co[n]tinue, car une fonction uniforme de deux variables indépendantes, q[ui] présente pour tout système fini de valeurs des variables le caract[ère] d'une fonction rationnelle, ne peut pas avoir une suite de points d'i[n]détermination se suivant d'une manière continue. Par conséquent [u] et v gardent une valeur constante quand (x_0, y_0, z_0) se déplace sur [la] courbe Γ. Nous avons alors, pour cette courbe,

$$B\,dx - A\,dy = 0, \quad B_1\,dx - A_1\,dy = 0,$$

et, puisque

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

en même temps que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

on en conclut

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$$

et pareillement

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{B_1} = \frac{dz}{C_1}.$$

La courbe Γ étant une courbe d'intersection de la surface proposée [et] de la surface

$$B(x, y, z) = 0,$$

on aura, d'après ce qui précède, en tous les points de cette courbe,

$$A\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial y} + C\frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$

cette relation doit être vérifiée en tous les points des courbes compl[...]

mentaires d'intersection. Ceci posé, considérons une de ces courbes Γ; soit (x_0, y_0, z_0) un point simple de cette courbe, qui soit en même temps un point simple de la surface, et soit f'_{z_0} différent de zéro, ce qu'il est bien permis de supposer. Nous aurons

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = u - u_0,$$

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = v - v_0;$$

faisons tendre (x, y, z) vers (x_0, y_0, z_0). On peut écrire

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$
$$= [\beta + P(x - x_0, y - y_0)]\,dx + [\alpha + Q(x - x_0, y - y_0)]\,dy,$$
$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$
$$= [\beta_1 + P_1(x - x_0, y - y_0)]\,dx + [\alpha_1 + Q_1(x - x_0, y - y_0)]\,dy,$$

les P et Q étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$, qui ne renferment pas de terme constant, et, puisque

$$BA_1 - AB_1 = 0 \quad \text{pour} \quad x_0,\ y_0,\ z_0,$$

on aura

$$\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1 = 0.$$

Nous pourrons enfin écrire, après intégration,

$$(I)\quad \begin{cases} \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \ldots = u - u_0, \\ \beta_1(x - x_0) + \alpha_1(y - y_0) + \ldots = v - v_0. \end{cases}$$

Le point (x_0, y_0, z_0) étant un point simple de la courbe Γ, A, B, C et A_1, B_1, C_1 ne s'annulent pas simultanément en ce point; car, s'il en était ainsi, l'égalité

$$R(x, y, z) = \frac{AB_1 - A_1B}{f'_z}$$

montrerait que (x_0, y_0, z_0) est un point double de la surface R, et, par conséquent, un point double de Γ. On peut donc supposer que α, β, α_1 et β_1 ne sont pas nuls simultanément; soit $\beta \neq 0$.

Revenons aux équations (I); elles montrent que le rapport $\frac{v - v_0}{u - u_0}$ tend vers une limite indépendante du rapport $\frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Posons

$$u - u_0 = t\lambda(t),$$
$$v - v_0 = t\lambda_1(t),$$

λ et λ_1 étant deux fonctions holomorphes de t, dans le voisinage de $t = 0$; elles sont, d'ailleurs, uniquement assujetties à satisfaire la relation

$$\beta_1\lambda(0) - \beta\lambda_1(0) = 0.$$

Substituons ces valeurs de u et v dans les équations (I). On aura

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \beta\ (x - x_0) + \alpha\ (y - y_0) + \ldots = t\lambda(t), \\ \beta_1(x - x_0) + \alpha_1(y - y_0) + \ldots = t\lambda_1(t). \end{cases}$$

Si l'on fait, dans ces équations, $t = 0$, on a deux équations qui seront satisfaites par un même développement de $x - x_0$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $y - y_0$; c'est le développement qui donne la courbe Γ ou plutôt sa projection sur le plan des xy; ceci résulte de ce que u et v gardent les valeurs constantes u_0 et v_0, quand (x, y, z) se déplace sur la courbe Γ.

Cette remarque faite, revenons aux équations (II). Nous tirerons de la première $x - x_0$ en fonction de t et de $y - y_0$, et nous substituerons cette valeur de $x - x_0$ dans la seconde équation. La relation ainsi obtenue devra être vérifiée pour $t = 0$, quel que soit y, d'après ce qui vient d'être dit; tous les termes contiendront donc t en facteur. Ce facteur enlevé, il restera un terme du premier degré en $y - y_0$, et nous aurons ainsi le développement de $y - y_0$ suivant les puissances croissantes de t, développement qui ne contiendra pas de terme indépendant de t. Nous avons ainsi $x - x_0$ et $y - y_0$, représenté par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de t. Il importe de s'as-

surer s'il y a bien, comme nous venons de le dire, un terme du premier degré en $y - y_0$. Nous allons établir que, si, comme il a été supposé, *le point* (x_0, y_0, z_0) *est un point simple de la courbe* Γ, il reste toujours un terme du premier degré dans l'équation précédente. Pour le démontrer, substituons aux équations (II) les deux équations suivantes

$$\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \ldots = t\lambda(t),$$

$$m(x - x_0)^2 + 2n(x - x_0)(y - y_0) + p(y - y_0)^2 + \ldots$$
$$= t[\beta_1 \lambda(t) - \beta\lambda_1(t)],$$

ce qui revient à supposer que $\beta_1 = \alpha_1 = 0$, c'est-à-dire que les surfaces

$$B_1 = 0, \quad A_1 = 0$$

passent en (x_0, y_0, z_0). Or nous aurons sans peine les valeurs de m, n et p. Le développement de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

montre immédiatement que l'on a, à un facteur près fini et différent de zéro,

$$m = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)_0 f'_{x_0},$$

$$n = \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)_0 f'_{y_0} = -\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)_0 f'_{x_0}\right],$$

$$p = -\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)_0 f'_{y_0}\right].$$

On a, d'ailleurs,

$$\beta = B_0, \quad \alpha = -A_0.$$

Si, dans l'équation finale, le terme du premier degré en $y - y_0$ disparaît, le trinôme

$$m(x - x_0)^2 + 2n(x - x_0)(y - y_0) + p(y - y_0)^2,$$

qui a nécessairement une racine commune avec

$$\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0),$$

aura cette racine pour racine double; par conséquent, on aura

$$m\alpha - n\beta = 0, \quad n\alpha - p\beta = 0,$$

ce qui nous donne

$$\mathrm{A}_0\left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial x}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\right)_0 f'_{x_0}\right] - \mathrm{B}_0\left[\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\right)_0 f'_{x_0}\right] = 0,$$

$$\mathrm{A}_0\left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\right)_0 f'_{y_0}\right] - \mathrm{B}_0\left[\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\right)_0 f'_{z_0} - \left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\right)_0 f'_{y_0}\right] = 0,$$

que nous écrirons enfin

$$\frac{\mathrm{A}_0\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial x}\right)_0 - \mathrm{B}_0\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\right)_0}{f'_{x_0}} = \frac{\mathrm{A}_0\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\right)_0 - \mathrm{B}_0\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\right)_0}{f'_{y_0}} = \frac{\mathrm{A}_0\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\right)_0 - \mathrm{B}_0\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\right)_0}{f'_{z_0}};$$

d'où l'on conclurait que la surface, représentée par l'équation

$$\mathrm{AB}_1 - \mathrm{BA}_1 = 0,$$

c'est-à-dire la surface $\mathrm{R} = 0$, est tangente en (x_0, y_0, z_0) à la surface proposée.

8. Supposons maintenant que la surface R soit tangente à la surface f en un point simple (x_0, y_0, z_0) de cette surface. La courbe Γ aura en ce point un point double; or la courbe Γ satisfait aux équations différentielles

$$\frac{dx}{\mathrm{A}} = \frac{dy}{\mathrm{B}} = \frac{dz}{\mathrm{C}},$$

ainsi qu'aux suivantes :

$$\frac{dx}{\mathrm{A}_1} = \frac{dy}{\mathrm{B}_1} = \frac{dz}{\mathrm{C}_1}.$$

Si donc les six quantités A, B, C, A_1, B_1 et C_1 ne s'annulent pas simultanément en (x_0, y_0, z_0), on aura, par l'une ou l'autre de ces équations, un développement qui ne donnera qu'une seule branche de courbe passant en (x_0, y_0, z_0). La conclusion est qu'on a en (x_0, y_0, z_0)

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1 = \mathrm{C}_1 = 0.$$

Ceci posé, les deux équations

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{\mathrm{B}\,dx - \mathrm{A}\,dy}{f'_z} = u - u_0,$$

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{\mathrm{B}_1\,dx - \mathrm{A}_1\,dy}{f'_z} = v - v_0$$

deviendront

$$m\,(x - x_0)^2 + 2n\,(x - x_0)(y - y_0) + p\,(y - y_0)^2 + \ldots = u - u_0,$$
$$m_1(x - x_0)^2 + 2n_1(x - x_0)(y - y_0) + p_1(y - y_0)^2 + \ldots = v - v_0,$$

et l'on aura évidemment

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}.$$

Nous pouvons faire une combinaison de ces équations, de manière que la seconde n'ait pas de terme du second degré en $x - x_0$ et $y - y_0$. Nous pouvons donc supposer, afin de ne pas multiplier les notations, que cette condition est précisément remplie dans les deux équations précédentes, c'est-à-dire que

$$m_1 = n_1 = p_1 = 0.$$

Écrivons donc

$$m(x - x_0)^2 + 2n(x - x_0)(y - y_0) + p(y - y)^2 + \ldots = u - u_0,$$
$$\alpha(x - x_0)^3 + 3\beta(x - x_0)^2(y - y)$$
$$+ 3\gamma(x - x_0)(y - y_0)^2 + \delta(y - y_0)^3 + \ldots = v - v_0;$$

puisque, en faisant $u = u_0$, $v = v_0$, les deux équations en x et y qu'on obtient ainsi seront vérifiées pour les deux branches de la courbe Γ qui passe en x_0, y_0, il est clair que les racines du polynôme

$$m + 2n\theta + p\theta^2$$

seront racines du polynôme

$$\alpha + 3\beta\theta + 3\gamma\theta^2 + \delta\theta^3.$$

Fait-on maintenant, dans les équations précédentes,

$$u - u_0 = t^2 \lambda(t), \quad v - v_0 = t^3 \lambda_1(t),$$

où λ et λ_1 sont des fonctions holomorphes de t dans le voisinage de $t = 0$, et d'ailleurs quelconques. A une valeur de t et, par suite, de $u - u_0$ et $v - v_0$ correspondent, par les équations précédentes, quatre systèmes de valeurs de $x - x_0$ et $y - y_0$.

On voit qu'alors les équations

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = u - u_0,$$

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = v - v_0$$

ne donnent pas, pour une suite continue de valeurs de u et v dans le voisinage de u_0 et v_0, un seul système de valeurs correspondantes de x et y. Il est donc impossible que la surface

$$R(x, y, z) = 0$$

soit tangente à la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

en un point simple (x_0, y_0, z_0) de cette dernière.

9. Nous devons maintenant considérer le cas où (x, y, z) tend vers un point double de la surface, par lequel passe une courbe Γ. Supposons d'abord qu'une courbe Γ rencontre la courbe double en un point (x_0, y_0, z_0); il n'y aura, dans ce cas, aucune difficulté, car on pourra raisonner, comme au numéro précédent, en considérant simplement la nappe de la surface passant en (x_0, y_0, z_0) sur laquelle se trouve la courbe Γ.

Une autre circonstance reste à examiner; la surface

$$R(x, y, z) = 0$$

passe par les points doubles *isolés* de la surface. La courbe complé-

mentaire Γ aura donc un point double, en un point double isolé (x_0, y_0, z_0) de la surface proposée que nous allons supposer être l'origine.

Nous avons vu qu'en un pareil point l'intégrale avait une valeur parfaitement déterminée (1re Partie, n° 5). De plus, quand la limite de $\frac{y}{x}$ est finie et n'annule pas $M + N\left(\frac{y}{x}\right)^2$ (*voir* le numéro cité), ce que l'on peut toujours supposer, les termes du premier ordre dans l'intégrale

$$\int_{0,0,0}^{x,y,z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

se réduisent à

$$\frac{c'x - cy - \lambda P z}{2P},$$

et pareillement pour l'intégrale

$$\int_{0,0,0}^{x,y,z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z},$$

les termes du premier degré seront

$$\frac{c'_1 x - c_1 y - \lambda_1 P z}{2P}.$$

La surface

$$R(x, y, z) = 0$$

aura généralement à l'origine un point simple, et la courbe Γ un point double dont les deux tangentes seront distinctes. Puisque les deux intégrales u et v gardent sur la courbe Γ les valeurs constantes u_0 et v_0, les deux expressions

$$c'x - cy - \lambda Pz,$$
$$c'_1 x - c_1 y - \lambda_1 P z$$

doivent s'annuler pour l'une et l'autre direction correspondant aux tangentes à la courbe Γ. Les plans, obtenus en égalant ces expressions à

zéro, coïncident donc. Ceci posé, revenons aux équations, en faisant $u_0 = v_0 = 0$,

$$\frac{c'x - cy - \lambda P z}{2P} + \ldots = u,$$

$$\frac{c'_1 x - c_1 y - \lambda_1 P z}{2P} + \ldots = v.$$

La discussion de ces deux équations pourra être faite de la manière suivante. On remarque d'abord que les deux intégrales u et v peuvent être écrites sous forme de série procédant suivant les puissances croissantes de x, y et z; nous pouvons d'abord supposer que v ne contient pas de terme du premier degré, il suffit, pour cela, de faire une combinaison linéaire convenable des deux équations précédentes. Écrivons donc

$$\frac{c'x - cy - \lambda P z}{2P} + \ldots = u,$$

$$\varphi_2(x, y, z) + \ldots = v,$$

$\varphi_2(x, y, z)$ étant un polynôme homogène du second degré en x, y et z. Posons

$$u = t\lambda(t), \quad v = t^2\lambda_1(t),$$

λ et λ_1 étant des fonctions holomorphes quelconques de t dans le voisinage de $t = 0$.

De la première équation nous pouvons tirer z sous forme de série procédant suivant les puissances croissantes de x, y et t; substituons cette valeur de z dans la seconde équation. Il viendra

$$(1) \qquad P(x, y) + tQ(x, y, t) = t^2\lambda_1(t),$$

P étant une série dont les premiers termes sont du second degré en x et y. Nous avons, de plus, la relation

$$f(x, y, z) = 0$$

qui devient, par la substitution de la valeur de z,

$$(2) \qquad P_1(x, y) + tQ_1(x, y, t) = 0,$$

P_1 commençant, comme P, par des termes du second degré. L'équation

$$P_1(x, y) = 0$$

donne les deux branches de la courbe Γ passant par l'origine, et il en est de même de

$$P(x, y) = 0.$$

Par suite, P et P_1 peuvent être supposés identiques, et nous avons, à la place des équations (1) et (2),

$$Q(x, y, t) - Q_1(x, y, t) = t\lambda_1(t), \tag{3}$$

$$P_1(x, y) + tQ_1(x, y, t) = 0. \tag{4}$$

L'équation (3) permettra de développer y suivant les puissances croissantes de x et t, et l'on substituera ce développement dans l'équation (4). Il arrivera, par conséquent, que l'équation (4), ainsi transformée, commencera par des termes du second degré en x et t; donc, en général, à une valeur de t correspondront deux valeurs de x. Les deux équations ne donnent donc pas une inversion uniforme : c'est du moins ce qui aura lieu en général, et, dans chaque cas particulier, on pourra faire la discussion complète en suivant la méthode précédente.

10. Nous avons supposé, dans les numéros qui précèdent, que le point (x, y, z) restait à distance finie. Employons, comme au n° **7** du Chapitre Ier, les coordonnées homogènes (x, y, z, t); ces quatre coordonnées ne sont pas nulles à la fois, et soit, par exemple, le point s'éloignant à l'infini, de telle manière que x soit différent de zéro. Nous poserons alors

$$\frac{y}{x} = Y, \quad \frac{z}{x} = Z, \quad \frac{t}{x} = T.$$

Nous avons vu (n° **7**, 1re Partie) que la différentielle

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

prend alors la forme

$$\frac{N\,dY - M\,dT}{f'_z(1, Y, Z, T)},$$

où M et N sont des polynômes en Y, Z, T. Nous aurons donc les deux équations

$$\frac{\mathrm{N}\,d\mathrm{Y} - \mathrm{M}\,d\mathrm{T}}{f'_z} = du,$$

$$\frac{\mathrm{N}_1\,d\mathrm{Y} - \mathrm{M}_1\,d\mathrm{T}}{f'_z} = dv,$$

entièrement semblables à celles que nous avons discutées dans les numéros précédents.

Au point à l'infini que nous avions à considérer avec les anciennes variables se trouve substitué un point (Y, Z, T) à distance finie, et l'on peut faire la discussion, comme nous l'avons montré plus haut.

Si l'on revient aux valeurs de x, y, z, dont nous nous sommes servi avant l'emploi des coordonnées homogènes, on aura

$$x = \frac{1}{\mathrm{T}}, \quad y = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}}, \quad z = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}}.$$

11. Résumons maintenant les résultats de la discussion qui vient d'être faite dans les numéros précédents (du n° **5** au n° **10**). Nous supposerons, d'après ce que nous avons dit (n° **9**), que la surface n'a pas de points doubles isolés; d'autre part, la surface adjointe

$$\mathrm{R}(x, y, z) = 0$$

d'ordre $(n - 4)$ coupe d'abord la surface suivant les courbes doubles, et soit Γ la courbe complémentaire d'intersection. La surface R ne sera tangente à la surface donnée f en aucun point de la courbe Γ (n° **8**), si ce n'est bien entendu aux points de rencontre de la courbe Γ et de la courbe double. La courbe Γ n'aura pas de points doubles. Nous avons considéré (n° **7**) le cas où (x, y, z) s'approche d'un point (x_0, y_0, z_0) de la courbe Γ; en désignant par u_0 et v_0 les valeurs correspondantes de u et v, nous avons vu que la limite λ du rapport

$$\frac{u - u_0}{v - v_0}$$

était égale à

$$\frac{\mathrm{B}(x_0, y_0, z_0)}{\mathrm{B}_1(x_0, y_0, z_0)}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{A(x_0, y_0, z_0)}{A_1(x_0, y_0, z_0)};$$

de plus, $x - x_0$ et $y - y_0$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de t, quand on a posé

$$u - u_0 = t\lambda(t),$$
$$v - v_0 = t\lambda_1(t)$$

avec la condition

$$B_1(x_0, y_0, z_0)\lambda(0) - B(x_0, y_0, z_0)\lambda_1(0) = 0.$$

Supposons maintenant que (x, y, z), partant de (x_0, y_0, z_0), suive la courbe Γ, les valeurs de u et v ne changeront pas; admettons qu'en un autre point (x_1, y_1, z_1) on ait

(1) $$\frac{B(x_1, y_1, z_1)}{B_1(x_1, y_1, z_1)} = \frac{B(x_0, y_0, z_0)}{B_1(x_0, y_0, z_0)};$$

les équations

$$u - u_0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$
$$v - v_0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

seront vérifiées pour $u = u_0$, $v = v_0$ par $x = x_1$, $y = y_1$. Posons, comme plus haut,

$$u - u_0 = t\lambda(t), \quad v - v_0 = t\lambda_1(t)$$

avec la condition

$$B_1(x_1, y_1, z_1)\lambda(0) - B(x_1, y_1, z_1)\lambda_1(0) = 0;$$

nous pourrons prendre, par suite, à cause de la relation (1), pour λ et λ_1, les mêmes fonctions que précédemment, et l'on voit alors que, pour une même valeur de t, on aura à la fois pour x et y des valeurs voi-

sines de (x_1, y_1) et des valeurs de (x_0, y_0); x et y ne seraient pas des fonctions uniformes de u et v. On conclut de là un théorème fort important pour l'étude qui nous occupe. Les deux équations

$$B - \mu B_1 = 0, \quad A - \mu A_1 = 0,$$

où μ est une constante arbitraire, ne peuvent être vérifiées que pour *un seul point* d'une courbe Γ, bien entendu, en dehors des points de la courbe double. *La courbe* Γ *est donc unicursale*, et les trois équations

$$\begin{aligned} B - \mu B_1 &= 0, \\ A - \mu A_1 &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

donnent pour x, y et z des fonctions rationnelles de μ.

Les conditions que nous venons de trouver sont, d'ailleurs, suffisantes. Considérons, en effet, les équations

$$u - u_0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

$$v - v_0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z};$$

nous supposons que (x, y, z) arrive en un point (x_0, y_0, z_0) de la courbe Γ, u et v tendant vers les valeurs u_0 et v_0. Je dis que, pour tout système de valeurs (u, v) dans le voisinage de (u_0, v_0), va correspondre, au moyen des équations précédentes, un point parfaitement déterminé (x, y, z); faisons, en effet, partir (u, v) de (u_0, v_0), et indiquons la loi de ce déplacement par les formules

$$u - u_0 = t\lambda(t), \quad v - v_0 = t\lambda_1(t),$$

où λ et λ_1 sont deux fonctions holomorphes, d'ailleurs arbitraires, de t dans le voisinage de $t = 0$.

Soit μ la valeur du quotient $\frac{\lambda(0)}{\lambda_1(0)}$; à cette valeur ne correspondra

qu'un point (x_1, y_1, z_1) sur la courbe Γ, et, en raisonnant comme plus haut, on voit que $x - x_1$ et $y - y_1$ peuvent être développés suivant les puissances de t.

12. Nous savons donc maintenant reconnaître si les équations aux différentielles totales

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v.

Ces fonctions seront nécessairement des fonctions quadruplement périodiques de u et v. C'est un point qu'il est bien facile d'établir; tout d'abord les deux intégrales

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}, \quad \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

n'auront évidemment pas plus de quatre paires de périodes, puisque les fonctions x et y données par les équations aux différentielles totales correspondantes sont des fonctions uniformes. D'autre part, le nombre des périodes sera effectivement *quatre;* c'est ce qui résulte du théorème suivant que je me borne à énoncer : *q intégrales abéliennes distinctes de première espèce correspondant à une courbe de genre p $(q \leq p)$ ne peuvent avoir moins de $2q$ systèmes de périodes simultanées.*

Un cas particulier intéressant et simple est celui où la courbe Γ n'existerait pas; dans ce cas, la courbe double de la surface serait d'ordre $\frac{m(m-4)}{2}$, et, pour tout système de valeurs de u et v, laissant x, y, z finis, ces fonctions ont une valeur parfaitement déterminée.

Toute surface, dont les coordonnées s'expriment, de la manière indiquée, par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, donne des exemples de réduction dans le nombre des périodes de certaines intégrales abéliennes correspondant à une courbe algébrique. Considérons une section plane quelconque de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soit

$$z = ax + by + c$$

l'équation du plan sécant; la courbe

$$(C) \qquad f(x, y, ax + by + c) = 0$$

présente une particularité intéressante au point de vue de la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes correspondantes. Si, en effet, dans les deux intégrales

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}, \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z},$$

on remplace z par

$$ax + by + c,$$

x et y étant alors liés par la relation (C), on aura *deux* intégrales de première espèce correspondant à la courbe (C), *ayant seulement quatre paires de périodes simultanées.*

15. Quelles sont les surfaces de moindre degré dont les coordonnées peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, et de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde, abstraction faite de multiples des périodes, qu'un seul système de valeurs des paramètres?

Nous avons vu précédemment (Chap. II, nos 4, 5, 6) que les surfaces du quatrième degré et les surfaces du cinquième degré ne pouvaient avoir deux intégrales distinctes de première espèce. Nous pouvons donc en conclure le théorème suivant :

Il n'existe pas de surfaces du quatrième et du cinquième degré dont les coordonnées s'expriment de la manière indiquée par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres.

C'est parmi les surfaces du sixième degré que l'on rencontre les premières surfaces jouissant de cette propriété. En voici un exemple : po-

sons

(1)
$$\begin{cases} x = P(u), \\ y = Q(v), \\ z = P'(u) + Q'(v), \end{cases}$$

$P(u)$ désignant la fonction doublement périodique de u, liée à sa dérivée $P'(u)$ par la relation

$$P'(u) = \sqrt{aP^3 + bP^2 + cP + d},$$

et $Q(v)$ une fonction doublement périodique de v définie par la relation

$$Q'(v) = \sqrt{\alpha Q^3 + \beta Q^2 + \gamma Q + \delta}.$$

Les équations (1) définissent donc la surface du sixième degré

(2)
$$z = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d} + \sqrt{\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta}.$$

A un point arbitraire (x, y, z) ne correspond qu'un seul système de valeurs de u et v. Quelles sont les singularités de la surface (2)? Écrivons son équation sous forme homogène

$$z t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ax^3 + bx^2 t + cxt^2 + dt^3} + \sqrt{\alpha y^3 + \beta y^2 t + \gamma y t^2 + \delta t^3}.$$

Elle aura pour courbe double la cubique définie par les équations

$$z = 0, \quad ax^3 + bx^2 t + cxt^2 + dt^3 = \alpha y^3 + \beta y^2 t + \gamma y t^2 + \delta t^3,$$

et aussi les trois droites

$$t = 0, \quad ax^3 = \alpha y^3.$$

La courbe double est donc du *sixième* degré, se décomposant en une cubique plane et trois droites.

QUATRIÈME PARTIE.

1. Nous allons considérer, dans ce Chapitre, les équations différentielles de la forme

$$(1)\qquad f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

f étant un polynôme. On sait qu'il existe une relation algébrique entre une fonction uniforme quadruplement périodique $u(x, y)$ et ses deux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Il y aura donc des équations aux dérivées partielles de la forme (1), auxquelles on pourra satisfaire en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y; je me propose de traiter la question inverse, c'est-à-dire de reconnaître si l'on peut satisfaire à une équation donnée

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y. On voit que c'est l'extension au cas de deux variables, d'un des problèmes traités par MM. Briot et Bouquet dans leur mémorable Mémoire sur l'intégration par les fonctions elliptiques, problème dont l'objet était de reconnaître si l'équation

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

pouvait être satisfaite par une fonction doublement périodique de z.

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant qui est fondamental pour ce qui va suivre :

u étant une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y, soit

$$f(u, v, w) = 0$$

la relation algébrique existant entre u et ses dérivées partielles $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial u}{\partial y}$. *A un point* ARBITRAIRE *de la surface précédente ne correspond qu'*UN SEUL *système de valeurs de* x *et* y, *abstraction faite, bien entendu, de multiples des périodes.*

Considérons, pour les deux variables indépendantes de x et y, le domaine que, suivant l'expression de M. Kronecker, on peut appeler le prismatoïde des périodes; supposons qu'à un point *quelconque* (u, v, w) de la surface f correspondent m systèmes de valeurs de x et y

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_m, y_m),$$

considérons les deux sommes $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ et $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$; comme pour chaque point (u, v, w) ces expressions n'ont qu'une valeur, abstraction faite de multiples de périodes, ce sont des intégrales de différentielles totales de première espèce. Supposons d'abord qu'elles se réduisent à des constantes. Désignons par

$$(x'_1, y'_1),\ (x'_2, y'_2),\ \ldots,\ (x'_m, y'_m)$$

un second système de valeurs, respectivement voisines des premières, pour lesquelles on aura

$$u(x'_1, y'_1) = u(x'_2, y'_2) = \ldots = u(x'_m, y'_m),$$

et de même pour v et w. Nous avons, d'ailleurs, d'après ce que nous venons de supposer,

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_m, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_m = y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_m. \end{cases}$$

Or on a, à un infiniment petit près par rapport à $x'_1 - x_1$ et $y'_1 - y_1$,

$$u(x'_1, y'_1) - u(x_1, y_1) = (x'_1 - x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (y'_1 - y_1)\frac{\partial u}{\partial y_1},$$

et de même

$$u(x'_2, y'_2) - u(x_2, y_2) = (x'_2 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + (y'_2 - y_2)\frac{\partial u}{\partial y_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u(x'_m, y'_m) - u(x_m, y_m) = (x'_m - x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m} + (y'_m - y_m)\frac{\partial u}{\partial y_m}.$$

Or $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial u}{\partial y}$ ont les mêmes valeurs en

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_m, y_m).$$

On a donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_m},\\ \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial u}{\partial y_2} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial y_m}.\end{aligned}\right.$$

Des égalités précédentes on conclut

$$(x'_1 - x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (y'_1 - y_1)\frac{\partial u}{\partial y_1} = (x'_2 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + (y'_2 - y_2)\frac{\partial u}{\partial y_2} = \cdots$$
$$= (x'_m - x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m} + (y'_m - y_m)\frac{\partial u}{\partial y_m}.$$

D'ailleurs, en vertu des relations (2) et (3), la somme de toutes ces expressions est nulle; nous pouvons donc écrire

$$(x'_1 - x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (y'_1 - y_1)\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0,$$

et, comme $x'_1 - x_1$ et $y'_1 - y_1$ sont dans un rapport arbitraire, on aurait

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0,$$

et ces deux relations ne sont évidemment pas vérifiées pour un point arbitraire (x_1, y_1). Par suite, à un point *quelconque* de la surface

$$f(u, v, w) = 0$$

ne correspond qu'un seul système de valeurs de (x, y), abstraction faite des multiples des périodes.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les deux sommes

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \text{ et } y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

étaient constantes, abstraction faite de multiples de périodes. Examinons les autres circonstances qui pourraient se présenter.

Nous avons dit que les deux sommes précédentes étaient nécessairement des intégrales de différentielles totales de première espèce; ces deux intégrales ne peuvent être distinctes. Soient, en effet,

$$\int^{u,v,w} P\,du + Q\,dv \text{ et } \int^{u,v,w} P_1\,du + Q_1\,dv,$$

où P et Q sont rationnelles en u, v, w, ces deux sommes. En remplaçant u, v, w par leur valeur en x et y, chacune des intégrales précédentes devient une fonction linéaire de x et y, soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma \text{ et } \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1.$$

Si l'on n'avait pas $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, on pourrait prendre

$$\alpha x + \beta y \text{ et } \alpha_1 x + \beta_1 y$$

comme nouvelles variables à la place de x et y, et l'on voit alors qu'à un système de valeurs u, v, w ne correspondrait qu'un seul système de valeurs de x et y.

Des deux intégrales, l'une est donc une fonction entière et du premier degré de l'autre, soit

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = A(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) + B,$$

A et B étant des constantes.

Prenons alors $y - Ax$ et x comme variables dans u et v, et désignons $y - Ax$ par y, pour ne pas multiplier les notations. Dans ce cas, la somme

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

est constante, la somme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

pouvant être variable. Dans cette hypothèse, cette somme représentera, comme nous l'avons dit, une intégrale de première espèce et pourra, par suite, se mettre sous la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma;$$

α ne sera pas nul, sinon il n'y aurait contre l'hypothèse qu'une valeur pour y correspondant à un point (u, v, w). Prenons donc

$$\alpha x + \beta y + \gamma$$

pour variable, en la désignant par x; de cette manière, à un *point quelconque* (u, v, w) correspondent m systèmes

$$(x_1, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad \ldots, \quad (x_1, y_m),$$

x ayant la même valeur dans chacun de ces systèmes, et la somme

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

étant constante.

Répétons alors le mode de raisonnement dont nous nous sommes servi plus haut; nous aurons

$$(y'_1 - y_1)\frac{\partial u}{\partial y_1} = (y'_2 - y_2)\frac{\partial u}{\partial y_2} = \ldots = (y'_m - y_m)\frac{\partial u}{\partial y_m},$$

et, par suite,

$$y'_1 - y_1 = y'_2 - y_2 = \ldots = y'_m - y_m,$$

si la valeur commune de $\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_m}$ n'est pas zéro, ce qui aura lieu évidemment pour un système arbitraire (x_1, y_1).

Mais la somme $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ reste constante, et l'on arrive, par suite, au résultat absurde

$$y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_2, \quad \ldots, \quad y'_m = y_m.$$

2. Il résulte immédiatement du théorème précédent que, si l'on peut satisfaire à l'équation

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y, la surface

$$f(u, v, w) = 0$$

rentrera dans la classe des surfaces dont nous avons fait l'étude au Chapitre précédent.

On aura donc tout d'abord à rechercher si l'on peut exprimer u, v, w par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres x et y. La surface devra admettre deux intégrales de première espèce

$$\int \frac{B\,du - A\,dv}{f'_w}, \quad \int \frac{B_1\,du - A_1\,dv}{f'_w}.$$

On doit pouvoir trouver deux combinaisons linéaires indépendantes de ces intégrales, telles que les deux équations aux différentielles totales

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(lB + mB_1)\,du - (lA + mA_1)\,dv}{f'_w} &= dx, \\ \frac{(nB + pB_1)\,du - (nA + pA_1)\,dv}{f'_w} &= dy \end{aligned} \right.$$

donnent pour u, v, w des fonctions quadruplement périodiques de x et de y, et telles que

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Cherchons à quelles conditions on pourra déterminer les quatre constantes (l, m, n, p), de façon qu'il en soit ainsi; nous n'aurons qu'à calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ à l'aide des équations précédentes. On trouve de suite, en se rappelant que $BA_1 - AB_1$ est divisible par f'_w, et posant, comme plus haut,

$$BA_1 - AB_1 = f'_w Q(u, v, w),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{nA + pA_1}{(lp - mn)\,Q(u, v, w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{lA + mA_1}{(lp - mn)\,Q(u, v, w)}.$$

Nous devrons donc avoir

$$nA + pA_1 = \quad (lp - mn)\,Q(u, v, w),$$
$$lA + mA_1 = -(lp - mn)\,Q(u, v, w),$$

et ces relations devant avoir lieu, pour tout point de la surface, seront des identités, puisque les degrés des polynômes qui y figurent sont moindres que le degré de la surface.

Nous pouvons donc enfin écrire

$$A = -Q(u, v, w)(mv + pw),$$
$$A_1 = \quad Q(u, v, w)(lv + nw).$$

Ainsi les polynômes A et A_1 doivent être divisibles par $Q(u, v, w)$, et les quotients sont homogènes et linéaires en v et w. Lorsque ces conditions seront remplies, on aura, par la division même de A et A_1 par Q, les quatre constantes l, m, n, p et les équations aux différentielles totales (1) qui doivent donner u en fonction de x et y seront complètement déterminées.

5. Les considérations précédentes nous donnent une solution du problème proposé, mais elles exigent la recherche préalable des intégrales de différentielles totales relatives à la surface

(1) $$f(u, v, w) = 0.$$

On peut résoudre autrement le problème, sans passer par cette recherche préalable des intégrales de différentielles totales de première espèce, ou du moins déduire ces intégrales de l'équation proposée et d'une seconde équation qui se forme immédiatement à l'aide d'un polynôme adjoint Q.

Désignons comme plus haut (nº 5, Chap. III) par $Q(u, v, w)$ le polynôme adjoint d'ordre $(m-4)$; ce polynôme sera déterminé à un facteur près, puisque la surface f doit être nécessairement du genre un. Soit Q un polynôme parfaitement déterminé.

On aura (voir *loc. cit.*)

$$\frac{Q(u, v, w)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{f'_w(u, v, w)} = a,$$

a étant une constante, et cette équation pourra s'écrire

$$(2) \qquad \frac{Q(u, v, w)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{f'_w(u, v, w)} = a.$$

De l'équation (1), nous tirons d'autre part

$$(3) \qquad f'_u v + f'_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f'_w \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Les équations (2) et (3) permettent d'exprimer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ en fonction de u, v, w.

Portant ces valeurs dans les deux équations

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy,$$

nous allons en tirer

$$dx = M\ du + N\ dv,$$
$$dy = M_1\, du + N_1\, dv,$$

les M et les N étant des fonctions rationnelles de u, v, w. On trouve ainsi

$$dx = \frac{\frac{af'_w f'_v - vwQf'_u}{vf'_v + wf'_w}du - Qw\,dv}{af'_w},$$

$$dy = \frac{\frac{a(f'_w)^2 + Qv^2 f'_u}{vf'_v + wf'_w}du + Qv\,dv}{af'_w}.$$

dx et dy devront être des différentielles totales de première espèce. On devra donc pouvoir choisir la constante a de telle sorte que

$$(4) \qquad \frac{af'_v f'_w - vwQf'_u}{vf'_v + wf'_w}$$

puisse se mettre sous la forme d'un polynôme entier en u, v, w, en tenant compte toutefois de la relation

$$f(u, v, w) = 0.$$

Il en sera de même pour l'expression

$$\frac{a(f'_w)^2 + Qv^2 f'_u}{vf'_v + wf'_w} \tag{5}$$

qui, pour la même valeur de a, devra être égale à un polynôme. On aura immédiatement la valeur de a qui pourrait remplir les conditions précédentes, en prenant un système (u, v, w) satisfaisant aux deux équations

$$vf'_v + wf'_w = 0, \quad f(u, v, w) = 0,$$

et pour lequel f'_w soit différent de zéro. L'équation

$$a(f'_w)^2 + Qv^2 f'_u = 0$$

donnera la valeur de a, et il restera simplement à vérifier si les deux expressions (4) et (5) sont susceptibles de la forme indiquée. S'il en est ainsi, on n'aura plus qu'à vérifier si dx et dy sont des différentielles totales de première espece, et l'étude s'achèvera comme au numéro précédent.

Application géométrique d'un théorème de Jacobi;

Par M. G. HUMBERT.

Le théorème dont il s'agit, et dont nous empruntons l'énoncé à Clebsch et Gordan (*Abelsche Functionen*, p. 44), est le suivant [1] :

f et F étant deux fonctions homogènes, de degrés m et n, en x, y, z, soient

$$X = Af + BF = 0,$$
$$Y = Cf + DF = 0$$

les équations obtenues en éliminant successivement y et x entre les équations $f = 0$, $F = 0$; α le coefficient commun de la plus haute puissance de x, (x^{mn}), dans X et de y^{mn} dans Y;

$$\Delta = AD - BC;$$

soit enfin U une fonction entière quelconque de degré $m + n - 2$ en x, y, z; Δ_0 et U_0 les valeurs de Δ et U pour $z = 0$; on a

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{U_i}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{(-1)^{mn}}{\alpha^2}\left[\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}.$$

---

(1) JACOBI, *Theoremata nova algebraica* (*Journal de Crelle*, t. 14).

Dans cette formule, la Σ s'étend aux mn points communs aux deux courbes $f=0$ et $F=0$; dans le second membre, l'expression

$$\left[\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

désigne le coefficient du terme en $\frac{1}{xy}$ dans le développement de $\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous ferons, au sujet de la formule (1), les remarques suivantes. Soient, d'après les notations de Clebsch,

$$f = x_0 + x_1 y + x_2 y^2 + \ldots + x_n y^n,$$
$$F = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_m y^m.$$

On a (Clebsch et Gordan, *loc. cit.*, p 40)

$$X = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots \\ 0 & x_0 & x_1 & \ldots \\ 0 & 0 & x_0 & \ldots \\ . & . & .. & \ldots \\ X_0 & X_1 & X_2 & \ldots \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots \\ y & x_0 & x_1 & \ldots \\ y^2 & 0 & x_0 & \ldots \\ .. & . & .. & \ldots \\ 0 & X_1 & X_2 & \ldots \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \ldots \\ 0 & x_0 & x_1 & \ldots \\ 0 & 0 & x_0 & \ldots \\ . & . & .. & \ldots \\ 1 & X_1 & X_2 & \ldots \\ y & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix},$$

et, en posant

$$f = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots + y_n x^n,$$
$$F = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \ldots + Y_m x^m,$$

on a des expressions analogues pour Y, C et D.

Soient enfin f_0 et F_0 les valeurs de f et F pour $z=0$; on a

$$f_0 = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + \ldots + a_n x^n,$$
$$F_0 = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m$$

et

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ . & .. & .. & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ . & .. & .. & \dots \end{vmatrix}.$$

Cela posé, remarquons que, dans le second membre de la relation (1), figure Δ_0, c'est-à-dire la valeur de AD — BC pour $z = 0$.

Faisons $z = 0$ dans l'expression de A; $x_0, x_1, \dots, X_0, X_1, \dots$, qui sont des fonctions de x et de z seuls, se réduiront à leurs termes de degré le plus élevé en x, c'est-à-dire à leurs termes en $x^n, x^{n-1}, \dots, x^m, x^{m-1}, \dots$ respectivement, et, par conséquent, la valeur A_0 de A pour $z = 0$ ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans f et dans F. Il en est de même pour B_0, C_0, D_0 et, par suite, pour Δ_0; on peut donc dire que Δ_0 ne dépend que des coefficients de f_0 et de F_0.

Il en est de même de α, d'après l'expression même de cette constante, donnée plus haut, et par suite :

La valeur de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \frac{U_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i}$$

ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans les trois fonctions f, F, U, *de degrés respectifs n, m, $m+n-2$.*

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement dans un cas particulier.

Faisons, en effet, $z = 1$ et supposons les axes de coordonnées rectangulaires.

Soit m un point commun aux courbes $f = 0$, $F = 0$; nous appellerons angle des deux tangentes aux deux courbes au point m l'angle aigu de

ces droites, que nous affecterons d'un signe selon la convention suivante :

Faisons tourner autour du point m la tangente à la courbe $f=0$, de manière à la faire coïncider avec la tangente à la courbe $F=0$ en décrivant l'angle aigu que font les deux droites; si le sens de cette rotation est le sens trigonométrique, l'angle aura le signe $+$, sinon il aura le signe $-$.

D'après cette convention, on aura, pour la tangente de cet angle,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}}{1 + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial y}}}$$

ou

$$\cot V = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Le numérateur de $\cot V$ est de degré $m+n-2$; on peut donc faire dans la formule (1)

$$U = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}$$

et l'on aura

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{mn} \cot V_i = \frac{(-1)^{mn}}{x^2}\left[\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right]_{x=1,\, y=1}.$$

La formule de Jacobi permet donc de calculer la somme des cotangentes des mn angles d'intersection de deux courbes algébriques quelconques, ces angles étant définis, comme on l'a fait plus haut.

Le second membre de (2) ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans f, F et U, c'est-à-dire dans f et dans F; en d'autres termes, il ne dépend que des directions asymptotiques des deux courbes $f=0$ et $F=0$; d'où cette proposition :

THÉORÈME I. — *La somme des cotangentes des angles d'intersection*

de deux courbes algébriques est égale à la somme analogue pour deux courbes quelconques, respectivement asymptotiques aux premières.

En particulier :

COROLLAIRE. — *La somme des cotangentes des angles d'intersection de deux courbes algébriques est égale à la somme des cotangentes des angles sous lesquels les asymptotes de l'une coupent les asymptotes de l'autre.*

On peut faire de ces principes quelques applications intéressantes.

1° *La courbe* $F = 0$ *est une droite.* — *La somme des cotangentes des angles d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique reste fixe quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.*

Cette proposition revient au théorème bien connu sur les diamètres; prenons, en effet, la direction des sécantes pour celle de Ox et considérons deux sécantes situées à la distance dy l'une de l'autre. On a, en chaque point d'intersection de l'une d'elles et de la courbe $f = 0$,

$$dy = dx_i \operatorname{tang} V_i;$$

d'où

$$\cot V_i = \frac{dx_i}{dy}.$$

La relation $\Sigma \cot V_i = \text{const.}$ donne ainsi

$$\Sigma\, dx_i = A\, dy,$$

d'où

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = ay + b;$$

en d'autres termes, le centre des moyennes distances des points communs à une sécante et à une courbe algébrique décrit une droite quand la sécante se déplace parallèlement à elle-même : c'est le théorème de Newton.

2° *La courbe* $F = 0$ *est un cercle.* — Les asymptotes du cercle sont parallèles aux droites $y = ix$, $y = -ix$; elles font, avec la droite

$$y = mx,$$

des angles V′ et V″, tels que

$$\cot V' = \frac{1+mi}{m-i} = \quad i,$$

$$\cot V'' = \frac{1-mi}{m+i} = -i.$$

La somme de ces cotangentes est nulle, quel que soit m, sauf pour $m = \pm i$, une des cotangentes se présentant alors sous la forme $\frac{0}{0}\cdot$

Il en résulte que la somme des cotangentes des angles sous lesquels les asymptotes du cercle coupent les asymptotes d'une courbe quelconque est nulle, à moins que cette courbe ne passe par un des points circulaires à l'infini; et, par suite, d'après le corollaire du théorème I :

Théorème II. — *Un cercle coupe, sous des angles dont les cotangentes ont une somme nulle, toute courbe algébrique ne passant par aucun des points circulaires à l'infini du plan.*

Ainsi, étant donnés sur un cercle $2n$ points appartenant à une courbe algébrique d'ordre n, on ne peut se donner arbitrairement les tangentes en ces points à la courbe algébrique, quel que soit le degré de celle-ci : une des $2n$ tangentes est déterminée par les $2n-1$ autres.

Ce théorème donne lieu à quelques développements intéressants. Soient

ρ le rayon du cercle considéré ;
$\theta_1, \theta_2, \ldots$ les angles que font Ox, les $2n$ rayons allant du centre de ce cercle aux $2n$ points d'intersection du cercle et de la courbe $f = 0$;
$V_1, V_2, \ldots$ les angles d'intersection du cercle et de la courbe;
$\rho + d\rho$ le rayon d'un cercle concentrique au premier et infiniment voisin;
$d\theta_1, d\theta_2, \ldots$ les variations des angles $\theta_1, \theta_2, \ldots$, quand on passe du cercle ρ au cercle $\rho + d\rho$.

On a évidemment

$$\cot V_i = \rho \frac{d\theta_i}{d\rho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

La relation

$$\Sigma \cot V_i = 0$$

donne ainsi

$$\Sigma \, d\theta_i = 0,$$

ou

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \text{const.},$$

ce qu'on peut énoncer géométriquement.

Soient p points situés sur un cercle; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant les angles que font avec une droite fixe les rayons qui joignent le centre du cercle à ces points, appelons *centres des moyennes distances circulaires* des p points les p points du cercle qui correspondent aux p rayons faisant avec la droite fixe des angles Θ donnés par la formule

$$\Theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{p} + 2h\frac{\pi}{p} \quad (h = 0, 1, \ldots, p-1).$$

La relation $\theta_1 + \theta_2 + \ldots = \text{const.}$ montre que les centres des moyennes distances circulaires des $2n$ points communs à une courbe algébrique et à une série de cercles concentriques décrivent n droites (ou $2n$ rayons).

Je dis que les directions de ces n droites ne dépendent que de celles des asymptotes de la courbe considérée, et sont indépendantes de la position du centre commun des cercles sécants.

Remarquons, en effet, que si le rayon du cercle sécant augmente indéfiniment, son centre restant fixe, ses points d'intersection avec la courbe s'éloignent à l'infini, et à la limite les $2n$ rayons qui joignent ces points au centre du cercle coïncident avec les n droites, formant $2n$ rayons, menées par le centre parallèlement aux asymptotes de la courbe. Soient $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$ les angles que font ces droites avec Ox; on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n} = \theta'_1 + (\theta'_1 + \pi) + \theta'_2 + (\theta'_2 + \pi) + \ldots \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On a donc la proposition suivante :

Théorème III. — *Les centres des moyennes distances circulaires des points communs à une courbe algébrique d'ordre n, ne passant par aucun des points cycliques du plan et à un cercle décrivent n droites quand le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.*

Ces n droites concourent au centre commun des cercles sécants; leurs directions sont indépendantes de la position de ce point et ne dépendent que des directions des asymptotes de la courbe considérée.

Ces propositions correspondent à celles de Newton sur les diamètres, quand on considère des cercles concentriques au lieu des droites parallèles.

On peut donner au théorème précédent une autre forme.

Appelons *axes d'orientation* de p rayons concourants, et faisant avec Ox des angles $\theta_1, \ldots, \theta_p$, les p rayons concourant au même point, et faisant avec Ox des angles Θ, tels que

$$\Theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{p} + 2h\frac{\pi}{p} \quad (h = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Les axes d'orientation des $2n$ rayons qui joignent un point quelconque aux points d'intersection d'un cercle, ayant ce point pour centre, et d'une courbe algébrique, sont parallèles aux axes d'orientation des n droites, formant $2n$ rayons, menées par un point du plan parallèlement aux asymptotes de la courbe considérée.

On suppose toujours que cette courbe ne passe par aucun des points circulaires à l'infini.

Ainsi pour que $2n$ points donnés sur un premier cercle, et $2n$ points situés sur un second, soient sur une courbe algébrique indécomposable d'ordre n, il est nécessaire (mais non suffisant) que les axes d'orientation des $2n$ rayons joignant le centre de chaque cercle aux $2n$ points donnés sur ce cercle forment deux faisceaux de rayons parallèles entre eux : cette condition détermine un des $4n$ points en fonction des $4n - 1$ autres.

De même, on ne peut pas se donner arbitrairement les $2n$ points où un cercle est traversé par une courbe d'ordre n, et les directions asymptotiques de cette courbe, c'est-à-dire les n points où elle coupe la droite de l'infini : un des $3n$ points dont il s'agit est déterminé par les $3n - 1$ autres, en vertu de la proposition précédente.

On peut déduire du théorème II une formule simple relative aux rayons de courbure d'une courbe algébrique en $2n$ points situés sur un cercle.

On a en effet, en coordonnées polaires, pour l'expression du rayon de courbure en un point,

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}.$$

Si θ_1, θ_2, ..., θ_{2n} sont les angles que font avec l'axe polaire les rayons vecteurs des $2n$ points de la courbe situés sur un cercle ayant son centre au pôle et de rayon ρ, on a

$$\Sigma\, d\theta_i = 0,$$

$d\theta_i$ désignant la variation de θ_i quand on passe du cercle ρ au cercle $\rho + d\rho$; et, par suite,

$$\text{(A)} \qquad \sum \frac{d^2\theta_i}{d\rho^2} = 0.$$

Or on a

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} = -\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^3},$$

et, d'après l'expression de R, en posant $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$,

$$-\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho'^3} + \frac{2}{\rho'} - \frac{1}{R\rho'^3}(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}};$$

on a, de plus,

$$\cot V = \frac{\rho}{\rho'},$$

d'où l'on conclut, en vertu de (A), la relation

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\left(\frac{\cot^3 V_i}{\rho} + \frac{2\cot V_i}{\rho}\right) = \sum \frac{1}{R_i \sin^3 V_i},$$

ou, puisque

$$\Sigma \cot V_i = 0,$$

il reste

$$\frac{1}{\rho}\sum \cot^3 V_i = \sum \frac{1}{R_i \sin^3 V_i},$$

relation qui lie les angles sous lesquels une courbe est coupée par un

cercle de rayon ρ, et les rayons de courbure aux points d'intersection.

3° *La courbe* $F = 0$, *de degré* $2m$, *a* m *points communs avec la droite de l'infini en chacun des deux points cycliques du plan.* — Les termes du plus haut degré dans F sont alors $(x^2 + y^2)^m$, et les asymptotes de la courbe $F = 0$ sont parallèles deux à deux aux droites $y = ix$, $y = -ix$: la démonstration du théorème II subsiste évidemment, et par suite :

Théorème IV. — *Une courbe algébrique de degré* $2m$, *ayant* m *points communs avec la droite de l'infini en chacun des points cycliques du plan, coupe une courbe algébrique, ne passant par aucun de ces points, sous des angles dont les cotangentes ont une somme nulle.*

4° *Application aux coniques.* — Considérons deux coniques; les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de l'une d'elles, on aura, pour leurs équations,

$$0 = Ax^2 + Cy^2 + \ldots,$$

$$0 = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \ldots.$$

La somme des cotangentes des angles V_i sous lesquels elles se coupent est égale à la somme correspondante pour leurs asymptotes, somme que l'on calcule sans difficulté. On trouve ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=4} \cot V_i = \frac{4(A-C)B'(AC'+CA')}{(AC'-CA')^2 + 4ACB'^2}.$$

Cette somme sera nulle dans trois cas :

1° Si $A = C$, c'est-à-dire si l'une des coniques est un cercle, ce que nous savons déjà;

2° Si $B' = 0$, c'est-à-dire si les deux coniques ont leurs axes parallèles, condition qui comprend la précédente;

3° Si $AC' + CA' = 0$, c'est-à-dire si les parallèles menées par l'origine aux asymptotes des deux coniques forment un faisceau harmonique.

Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires : hypothèses qui déterminent ces fonctions [1];

Par M. Paul LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques,
Chargé du Cours de Mécanique à l'École des Sciences d'Alger.

Introduction.

Dans deux Mémoires antérieurs, les actions *pondéromotrices* les plus générales qu'on puisse observer ont été déduites de l'expérience seule et ramenées à l'action d'un courant fermé sur un élément de courant, à l'aide des hypothèses les plus incontestables; les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, dont six seulement sont observables, étant désignées collectivement sous le nom d'*actions pondéromotrices,* qui en exprime l'identité démontrée dans les deux Mémoires précédents, préférablement au nom d'*actions électrodynamiques,* qui explique cette identité par l'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère.

Il s'agit maintenant de calculer l'action d'un élément de courant sur un autre. La solution, affranchie de toute hypothèse, renferme des fonctions arbitraires. On pourrait même se demander si l'action d'un courant non fermé, qui n'a jamais été observée, est autre chose qu'une fiction : car on ne sait pas si un courant électrique peut exister sans être fermé. Mais elle est réelle d'après l'hypothèse des actions directes à distance, qui ramène tout à des actions mutuelles de points, et

(1) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, le 2 juillet 1883.

d'après celle d'un milieu continu, qui propage les forces apparentes à distance avec une vitesse nécessairement finie : les actions envoyées simultanément par les différents éléments d'un courant fermé doivent ainsi arriver successivement à un élément linéaire d'un autre courant : on n'a pas encore conçu d'hypothèse permettant de les regarder comme fictives.

C'est pourquoi elles sont traitées comme réelles dans ce Mémoire, qui énonce les solutions déterminées d'Ampère et de M. Reynard, puis la solution générale renfermant des fonctions arbitraires, que M. Maurice Lévy a donnée dans son cours du Collège de France. L'hypothèse d'Ampère et celle de M. Reynard déterminent complètement ces fonctions, en sorte que les deux solutions respectives sont seules compatibles avec les hypothèses de leurs auteurs.

Un *courant fermé permanent à trois dimensions* étant défini *celui dont l'électricité ne traverse pas la surface*, on a vu, dans le premier Mémoire, que son action sur un élément de courant extérieur s'exprime par un potentiel. Mais la forme de ce potentiel n'y a pas été donnée. Elle se déduit immédiatement d'une hypothèse que des expériences assez nombreuses ont vérifiée pour le cas de deux dimensions : cette hypothèse consiste à admettre qu'*un courant permanent, à plusieurs dimensions, est décomposable en éléments de courants linéaires ;* en sorte que rien n'y serait changé, si une surface quelconque du rhéophore, ayant pour génératrices des lignes du courant, devenait isolante.

Dans les deux Mémoires précédents, l'élément de courant qui reçoit l'action a été supposé extérieur au courant agissant. Cette lacune est comblée, dans le Mémoire actuel, au moyen de l'hypothèse suivante : *les actions électrodynamiques qui s'exercent à des distances insensibles, suivent toutes les lois observées à des distances sensibles.*

Mais ces deux hypothèses ont besoin de vérifications expérimentales : deux vérifications possibles, mais qui n'ont pas été faites, sont indiquées. La première, qui ne paraît pas facilement réalisable, est l'action d'un courant fermé, fixe et permanent, parcourant un liquide, sur un solénoïde fixe et fermé, plongé dans ce liquide. Le fil solénoïdal est supposé recouvert d'une couche isolante, dont le diamètre extérieur est assez petit pour que la présence du corps immergé ne change pas sensiblement les lignes du courant à trois dimensions. Soit μ la

masse qu'aurait le pôle positif du solénoïde, s'il n'était pas fermé : l'action qui en sollicite l'axe est la même que si cet axe était parcouru par un courant linéaire idéal, d'intensité $4\pi\mu$, et si les lignes du courant à trois dimensions devenaient les lignes de force d'un champ magnétique fictif, ayant pour force directrice l'intensité cubique du courant.

Une seconde vérification expérimentale sera indiquée dans un Mémoire sur l'induction. On admet qu'un courant permanent, parcourant un fil homogène, passe uniformément dans une section droite. Il en résulte que les lignes de force, dans cette section, sont des circonférences concentriques; et que la force, constante sur chaque ligne, varie de l'une à l'autre proportionnellement à leurs rayons. Cette force intervient dans le calcul du coefficient de self-induction d'un fil fermé sur lui-même; et, comme on sait mesurer expérimentalement ce coefficient, on en déduit un nouveau moyen de vérifier les hypothèses déjà si bien vérifiées.

§ XIII. — Action d'un élément de courant sur un autre.

Solutions déterminées, mais hypothétiques, d'Ampère et de M. Reynard.

251 ([1]). Au lieu des deux principes d'Ampère **21** et **24**, on peut en invoquer un seul, qui en a été déduit, et qui réciproquement les renferme, quand on réduit le système agissant à un courant linéaire fermé, et quand on admet le principe **25**, c'est-à-dire quand on traite l'action d'un courant linéaire fermé sur un élément de courant extérieur comme réductible à une force unique, appliquée à cet élément, ou, en d'autres termes, quand on regarde comme nul le couple qu'il faut adjoindre à cette force, pour représenter une action quelconque, appliquée à un corps rigide. On a vu que l'action mutuelle de deux courants linéaires fermés $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, d'intensités constantes I et I', dont les arcs s et s', faisant partie de leurs longueurs totales S et S', se terminent aux points (x, y, z) et (x', y', z'), séparés par la distance r,

---

([1]) Les numéros de ce Mémoire font suite à ceux du premier (3e série, tome X de ce Journal p. 43-96), et du deuxième (p. 113-146 et 281-328).

est représentée par l'énergie (109")

$$(371)\quad W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\mathrm{II}'\int_0^{S} ds \int_0^{S'} \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)ds'.$$

Cette formule, trouvée par Ampère, a été vérifiée avec beaucoup de soin par Weber, pour le cas où les deux lignes S et S' sont rigides. Il en résulte qu'on peut invoquer, comme un des principes expérimentaux les mieux établis, l'énoncé suivant, exprimé par l'équation (143).

252. *Treizième principe expérimental.* — Le travail virtuel élémentaire $d\tau$ des actions mutuelles de deux courants linéaires fixes, fermés, permanents et rigides $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, est égal et de signe contraire à la variation de la fonction (371)

$$(372)\qquad d\tau = -dW.$$

Des cinq principes de la page 50 (tome X de la 3e série), les deux suivants seulement doivent être adjoints à l'énoncé **252**.

253. *Quatorzième principe.* — Les actions mutuelles de deux éléments de courants linéaires, fixes et permanents, I ds et I' ds', sont proportionnelles au produit I' ds' I ds; elles ne dépendent d'ailleurs que de la distance r qui les sépare, et des trois angles que font entre elles les directions r, ds, ds'.

254. L'action d'un courant linéaire $\mathfrak{S}'$ fixe, fermé et permanent, sur un élément de courant linéaire extérieur fixe I ds, se réduit à une force unique ($\mathfrak{S}'$, ds), appliquée à cet élément. Cet énoncé est renfermé dans celui du n° **25**.

Les potentiels au point M(x, y, z), où commence ds, des composantes du courant $\mathfrak{S}'$, d'intensité I' et de longueur S', étant

$$(373)\qquad \left\{\begin{aligned} F &= \mathrm{I}'\int_0^{S'} \frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}\,ds', \\ G &= \mathrm{I}'\int_0^{S'} \frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}\,ds', \\ H &= \mathrm{I}'\int_0^{S'} \frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}\,ds', \end{aligned}\right\}\qquad (110)$$

les composantes de la force directrice D, au point M, du courant $\mathfrak{S}'$, seront

$$(374) \qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (111)$$

expressions dont les signes supposent les axes disposés à gauche : considérant une aire A, que la ligne S′ ne rencontre pas, et qu'engendrerait la ligne S, si une déformation continue en réduisait la longueur à zéro, et désignant par $\alpha = \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{L}}$, $\beta = \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{L}}$, $\gamma = \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{L}}$ les cosinus directeurs de la normale positive $\mathfrak{L}$ de l'élément dA, normale qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant I, verrait à sa gauche ; on met la fonction (371) sous les deux formes suivantes (109 et 109‴),

$$(375) \qquad W = -I \iint_{A} (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dA,$$

$$(376) \qquad W = -I \int_0^S \left(F \frac{\partial x}{\partial s} + G \frac{\partial y}{\partial s} + H \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds.$$

Du principe **112** et de la formule (375), il résulte que les conditions **232**, **233** et **234** sont satisfaites, si le courant $\mathfrak{S}'$ produit sur I ds la force définie par son point d'application $M(x, y, z)$, et par ses composantes (11),

$$(377) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{S}', I\, ds)_x = I(C\, dy - B\, dz), \\ (\mathfrak{S}', I\, ds)_y = I(A\, dz - C\, dx), \\ (\mathfrak{S}', I\, ds)_z = I(B\, dx - A\, dy). \end{cases}$$

Or, en substituant (373) dans (374), on a (77)

$$(378) \qquad \begin{cases} A = -I' \displaystyle\int_0^{S'} \left(\frac{z' - z}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y' - y}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds', \\ B = -I' \displaystyle\int_0^{S'} \left(\frac{x' - x}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z' - z}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds', \\ C = -I' \displaystyle\int_0^{S'} \left(\frac{y' - y}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x' - x}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds'. \end{cases}$$

Les formules (377) et (378) sont celles qu'Ampère a données pour exprimer l'action d'un courant linéaire fermé sur un élément d'un autre courant linéaire. Elles représentent (n° **112**) la seule force qui soit compatible avec les conditions **252** et **254**.

Sachant que les formules (377) et (378) satisfont aux conditions **252** et **254**, on en déduit immédiatement que ces conditions sont satisfaites, si l'élément $\mathrm{I}'\,ds'$ produit sur $\mathrm{I}\,ds$ une force unique, appliquée au point $\mathrm{M}(x, y, z)$, et ayant pour composantes

$$(379)\quad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'}\,dy - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'}\,dz\right)ds',\\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_y &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'}\,dz - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'}\,dx\right)ds',\\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_z &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'}\,dx - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'}\,dy\right)ds', \end{aligned}\right.$$

quand on pose

$$(380)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{y'-y}{r^3}\,\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'-z}{r^3}\,\frac{\partial y'}{\partial s'}\right),\\ \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{z'-z}{r^3}\,\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x'-x}{r^3}\,\frac{\partial z'}{\partial s'}\right),\\ \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{x'-x}{r^3}\,\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'-y}{r^3}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right). \end{aligned}\right.$$

La force (379, 380) est celle qui a été proposée par M. Reynard.

L'action (379, 380) de $\mathrm{I}'\,ds'$ sur $\mathrm{I}\,ds$ sera représentée par

$$(381)\qquad (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{R}_0.$$

255. La force R_0 est appliquée à l'élément ds, normale à cet élément et située dans le plan qui passe par r et ds'.

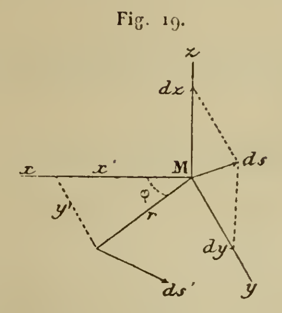
Car, en prenant le point $\mathrm{M}(x, y, z)$ pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche (*fig.* 19), disposé de manière que l'on ait

$$(382)\qquad z' = 0,\quad dz' = 0,\quad dx = 0,\quad dy > 0,\quad dz > 0,$$

c'est-à-dire prenant le plan (r, ds') pour celui des xy, la projection de

ds sur ce plan pour axe des y, et pour axe des z la normale au plan

Fig. 19.



(r, ds') qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par ds', verrait à sa gauche; on déduit des formules (380)

$$\frac{\partial A}{\partial s'} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial s'} = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial s'} = I'\left(\frac{x'}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) = \frac{I'}{r}\frac{\partial \operatorname{arc\,tang}\frac{y'}{x'}}{\partial s'} = \frac{I'}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s'} > 0,$$

et des formules (379)

$$(I'\,ds', I\,ds)_x = II'\frac{dy}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s'}ds' > 0, \quad (I'\,ds', I\,ds)_y = 0, \quad (I'\,ds', I\,ds)_z = 0.$$

Ainsi, dans le système rectangulaire d'axes à gauche défini par les conditions (382), la force R_0 (381) a la direction positive de l'axe des x, et l'intensité

$$(383) \qquad R_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s'}.$$

On verra plus loin (**240**) que cette force est la seule compatible avec les hypothèses de M. Reynard et avec le principe **232**.

236. *Hypothèse d'Ampère.* — L'action de $I'\,ds'$ sur $I\,ds$ se réduit à une force unique $I\,ds\,I'\,ds'\,F$, appliquée à ds, dirigée suivant r, égale et de sens contraire à la réaction de $I\,ds$ sur $I'\,ds'$. D'ailleurs F ne dé-

pend que de r et des angles que font entre elles les trois directions r, ds, ds'.

257. Cette force F étant prise pour inconnue et assujettie aux conditions **255** et **256**, le principe **252** admet une solution unique, qui est celle d'Ampère.

En effet, les quatre variables indépendantes

$$(384)\qquad r,\quad \frac{\partial r}{\partial s}=p,\quad \frac{\partial r}{\partial s'}=p',\quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}=\frac{\partial p}{\partial s'}=\frac{\partial p'}{\partial s}=q,$$

déterminant (53), sauf une ambiguïté de signe, les positions relatives des deux éléments, la force F, positive quand elle est répulsive, et sa composante tangentielle

$$(385)\qquad T=Fp$$

ne peuvent dépendre que de ces quatre variables.

Pour que la force F satisfasse à la condition **252**, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la première équation (377), quelle que soit la direction de l'axe des x; et pour cela :

258. Il faut et il suffit que la différence entre sa composante, parallèle à cet axe, et la première expression (379), soit la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes x', y', z', qui ne renferme aucune autre variable relative au point (x', y', z').

Cette dernière condition montre que T est de la forme $\frac{\partial f(r,p,p',q)}{\partial s'}$; et, comme elle exige que f ne renferme ni $\frac{\partial r}{\partial s'}$ ni $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$,

$$T=\frac{\partial f(r,p)}{\partial s'}.$$

L'hypothèse **256** de l'égalité de l'action $\frac{T}{p}$ et de la réaction $\frac{T'}{p'}$ donne

$$p'T=pT'$$

ou

$$p'\left[\frac{\partial f(r,p)}{\partial r}p'+\frac{\partial f(r,p)}{\partial p}q\right]=p\left[\frac{\partial f(r,p')}{\partial r}p+\frac{\partial f(r,p')}{\partial p'}q\right].$$

Cette équation, où la variable q, indépendante des trois autres, n'entre qu'explicitement, se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial f(r,p)}{\partial r} = \frac{1}{p'^2}\frac{\partial f(r,p')}{\partial r}, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial f(r,p)}{\partial p} = \frac{1}{p'}\frac{\partial f(r,p')}{\partial p'};$$

et celles-ci expriment que leurs premiers membres sont indépendants de p,

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial f(r,p)}{\partial r} = \frac{d\psi(r)}{dr}, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial f(r,p)}{\partial p} = 2\varphi(r);$$

d'où

$$f(r,p) = p^2\psi(r) + \chi(p), \quad f(r,p) = p^2\varphi(r) + \varpi(r);$$

par suite $\psi(r) = \varphi(r)$, et $\chi(p) = \varpi(r) =$ une constante, qui disparaît dans les expressions

$$(386) \qquad \mathrm{T} = \frac{\partial p^2\varphi(r)}{\partial s'}, \quad \mathrm{F} = \frac{1}{p}\frac{\partial p^2\varphi(r)}{\partial s'}.$$

La même condition **258** va déterminer $\varphi(r)$. En prenant pour origine le point (x, y, z), et pour axe des z la tangente positive à ds, (379) et (380) donnent

$$(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x = \mathrm{II}'\left(\frac{x'}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds'\,dz = -\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\,\frac{z'^2}{r^3}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'};$$

et la composante de la force d'Ampère (**256**), dans la même direction, est

$$-\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{r}\mathrm{F} = -\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{rp}\frac{\partial[p^2\varphi(r)]}{\partial s'}$$
$$= \mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{z'}\frac{\partial\left[\left(\frac{z'}{r}\right)^2\varphi(r)\right]}{\partial s'},$$

en observant que rp ou $r\frac{\partial r}{\partial z}$, ou $-r\frac{\partial r}{\partial z'}$ se réduit à $-z'$.

La différence de ces deux expressions de $(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x$, divisée par $\mathrm{II}'\,dz$, est

$$\left[\frac{z'^2}{r^3}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'} + \frac{x'}{z'}\frac{\partial\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}}{\partial s'}\right]ds';$$

augmentée de la différentielle exacte

$$+\frac{\partial\left[\frac{x'}{z'}\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}\right]}{\partial s'}ds'$$

ou

$$\left[-\frac{x'}{z'}\frac{\partial\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}}{\partial s'}-\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}\right]ds',$$

elle devient

$$\frac{1-r\varphi(r)}{r^3}z'^2\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}ds',$$

expression de la forme $\left(u\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}+v\frac{\partial z'}{\partial s'}+w\frac{\partial r}{\partial s'}\right)ds'$, assujettie à être la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes $\frac{x'}{z'}$, z' et r. L'une des trois équations différentielles qui en résultent,

$$\frac{\partial u}{\partial z'}=0 \quad \text{ou} \quad 2\frac{1-r\varphi(r)}{r^3}z'=0,$$

donne

$$\varphi(r)=\frac{1}{r},$$

et les équations (386) deviennent

$$(387) \qquad T=\frac{\partial\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]}{\partial s'}, \quad F=\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial s}}\frac{\partial\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]}{\partial s'}.$$

Soient (*fig.* 20)

$$(388) \qquad \theta,\ \theta',\ \varepsilon,\ \omega$$

les angles (r, ds), (r, ds'), (ds, ds'), et l'angle dièdre que font entre eux

les plans des angles θ et θ'. On a les formules de transformation

$$(389)\qquad \cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos\theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'},$$

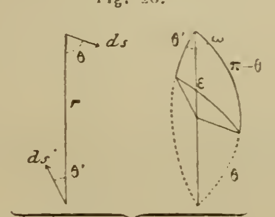
$$(390)\qquad \cos\varepsilon = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

$$(391)\qquad \cos\varepsilon = -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega,$$

$$(392)\qquad \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{1}{4r\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = \frac{2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}}{4r\sqrt{r}}.$$

(390) se déduit de $r^2 = (x - x')^2 + \ldots$, en calculant $\frac{\partial^2 r^2}{\partial s\,\partial s'}$. La formule (391) est donnée par le triangle sphérique (*fig.* 20)

Fig. 20.



obtenu en menant dans une sphère, qui a l'unité pour rayon, trois rayons parallèles à r, ds et ds'; les côtés sont θ', $\pi - \theta$, ε; et ω est l'angle opposé à ε. (392) s'obtient en dérivant $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}$.

En substituant (389) dans (387), on a la formule d'Ampère

$$(393)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = -\frac{\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'}{\cos\theta}\frac{\partial\frac{\cos^2\theta}{r}}{\partial s'};$$

et, en développant (387),

$$(394)\qquad \mathrm{F} = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right),$$

puis substituant (392), on obtient cette autre formule d'Ampère :

$$(395)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \frac{4\,\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

Substituant (389) et (390) dans (394), on trouve une troisième formule d'Ampère :

(396) répulsion $(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\dfrac{-2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'}{r^2}$;

et, en substituant (391), on a cette quatrième formule d'Ampère :

(397) répulsion $(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\dfrac{-\cos\theta\cos\theta' - 2\sin\theta\sin\theta'\cos\omega}{r^2}$.

Chacune des formules (393), (395), (396), (397) démontre **257**.

Solution générale, empruntée au cours de M. Maurice Lévy.

259. Soient

I, I′ les intensités constantes;
S, S′ les lignes fermées et rigides de deux courants $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$;
I *ds*, I′ *ds′* deux éléments de ces courants;
x, y, z et x', y', z' leurs coordonnées rectangulaires, dans un système d'axes à gauche;
r leur distance mutuelle.

L'action la plus générale de I′ *ds′* sur I *ds*, qui soit compatible avec les principes **252**, **253** et **254**, peut toujours être représentée par une force

(398) $$\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{R},$$

appliquée au point (x, y, z), ayant pour composantes

(399) $$\begin{cases} (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{X}, \\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_y = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Y}, \\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_{xy} = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Z}, \end{cases}$$

et par un couple

$$\text{(400)} \qquad \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{G}_1,$$

ayant pour moments, par rapport aux axes,

$$\text{(401)} \qquad \begin{cases} (\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds)_{yz} = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{L}_1, \\ (\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds)_{zx} = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{M}_1, \\ (\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds)_{xy} = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{N}_1. \end{cases}$$

Or les conditions **232**, **233** et **234** sont satisfaites par la solution de M. Reynard, dans laquelle l'action de $\mathrm{I}'\,ds'$ sur $\mathrm{I}\,ds$ est représentée par une force unique

$$\text{(402)} \qquad (\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{R}_0. \qquad \text{(381)}$$

appliquée au point (x, y, z), ayant pour composantes les expressions (379), qu'on peut mettre sous la forme abrégée

$$\text{(403)} \qquad \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{X}_0,\ \ \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Y}_0,\ \ \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Z}_0.$$

Soit

$$\text{(404)} \qquad \mathrm{X} = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 + \mathrm{Z}_1.$$

La question est ramenée à trouver les expressions les plus générales des quantités

$$\text{(405)} \qquad \mathrm{R}_1,\ \mathrm{G}_1,$$

c'est-à-dire de la force complémentaire et du couple, qui ont pour composantes X_1, Y_1, Z_1 et L_1, M_1, N_1.

Or la première équation (377) peut s'écrire

$$\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'} \mathrm{X}_0\,ds' = \mathrm{I}(\mathrm{C}\,dy - \mathrm{B}\,dz).$$

Mais on a vu (nº **112**) que les seconds membres des équations (377) ne peuvent avoir qu'une valeur compatible avec les principes **252** et **254**. Donc on doit avoir aussi, en introduisant les notations (404),

$$\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}}\mathrm{X}\,ds' \quad \text{ou} \quad \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_0+\mathrm{X}_1)\,ds' = \mathrm{I}(\mathrm{C}\,dy - \mathrm{B}\,dz).$$

Retranchant membre à membre ces deux expressions de la composante $(\mathfrak{C}', \mathrm{I}\,ds)_x$, on trouve

$$(406) \qquad \int_0^{\mathrm{S}}\mathrm{X}_1\,ds' = 0.$$

Il résulte aussi du principe **254** que le couple de l'action de $\mathfrak{C}'$ sur I ds est nul dans la solution générale. Comme il est nul dans la solution de M. Reynard, la différence des moments de ces deux couples, par rapport à l'axe des x, est nulle, quel que soit cet axe :

$$(407) \qquad \int_0^{\mathrm{S}'}\mathrm{L}_1\,ds' = 0.$$

Les identités (406), (407) ayant lieu quelle que soit la ligne fermée S', on doit avoir

$$(408) \qquad \mathrm{X}_1 = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial s'}, \quad \mathrm{L}_1 = \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial s'},$$

X_2 et L_2 ne pouvant dépendre que des positions et des directions de ds et de ds', c'est-à-dire de

$$(409) \qquad x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ \frac{\partial x}{\partial s},\ \frac{\partial y}{\partial s},\ \frac{\partial z}{\partial s}$$

et de $\frac{\partial x'}{\partial s'}, \frac{\partial y'}{\partial s'}, \frac{\partial z'}{\partial s'}$; mais ces trois dernières dérivées ne peuvent y entrer, en vertu de (406) et (407); et les variables (409) sont les seules dont X_2 et L_2 puissent dépendre.

Le calcul suivant de X_1 est emprunté à la Leçon faite au Collège de

France par M. Maurice Lévy le 11 février 1881, aussi exactement que j'ai pu le faire en complétant mes Notes.

On trouvera pareillement $Y_1 = \frac{\partial Y_2}{\partial s'}$, $Z_1 = \frac{\partial Z_2}{\partial s'}$, et le calcul de R_1 (405) est ramené à celui des trois fonctions X_2, Y_2, Z_2 des neuf variables (409), indépendantes de $\frac{\partial x'}{\partial s'}, \frac{\partial y'}{\partial s'}, \frac{\partial z'}{\partial s'}$, mais non complètement arbitraires, car la force complémentaire R_1 est assujettie à être indépendante du choix des axes; elle est définie en grandeur, direction et sens, par rapport aux éléments *ds* et *ds'*, par leur position relative; et, comme ils n'ont que deux positions relatives déterminées par les quatre quantités

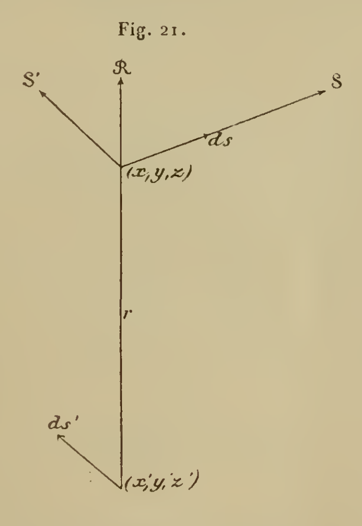
(410) $$r, \ \frac{\partial r}{\partial s}, \ \frac{\partial r}{\partial s'}, \ \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'},$$

les composantes de R_1

(411) $$\mathcal{R}, \ \mathcal{S}, \ \mathcal{S}' \quad (\textit{fig. } 21)$$

dans le prolongement de *r*, suivant *ds* et parallèlement à *ds'*, sont des

Fig. 21.



fonctions des quatre variables indépendantes (410) et ne peuvent dépendre d'aucune autre donnée, sauf le signe de ω (notation 388).

L'expression $X_1 = \mathfrak{R}\cos(\mathfrak{R}, x) + \mathfrak{s}\cos(\mathfrak{s}, x) + \mathfrak{s}'\cos(\mathfrak{s}', x)$, substituée dans (408), donne

$$(412) \qquad X_1 = \mathfrak{R}\frac{x - x'}{r} + \mathfrak{s}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{s}'\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial X_2}{\partial s'}.$$

Quand l'axe des x est perpendiculaire à r et à ds', cette équation se réduit à

$$\mathfrak{s}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial X_2}{\partial s'};$$

il en résulte

$$\frac{\partial x}{\partial s}\int_0^{S}\mathfrak{s}\,ds' = \int_0^{S}\frac{\partial X_2}{\partial s'}\,ds' = 0;$$

et, cette équation devant être vérifiée quelle que soit la ligne fermée S', on doit avoir $\mathfrak{s} = \frac{\partial K}{\partial s'}$. Mais, $\mathfrak{s}$ ne pouvant dépendre que des quatre variables (410), les deux premières seules peuvent entrer dans la fonction K, indépendante de toute dérivée relative à s'; donc

$$(413) \qquad \mathfrak{s} = \frac{\partial K\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}.$$

Dès lors, l'équation (412) exige que $\mathfrak{R}\frac{x - x'}{r} + \mathfrak{s}'\frac{\partial x'}{\partial s'}$ soit aussi la dérivée exacte, par rapport à s', d'une fonction $H(x - x')$ de x', y', z', indépendante de toute dérivée relative à s' :

$$\mathfrak{R}\frac{x - x'}{r} + \mathfrak{s}'\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial H}{\partial s'}(x - x') - H\frac{\partial x'}{\partial s'},$$

équation qui devient

$$(414) \qquad \frac{\mathfrak{R}}{r} = \frac{\partial H}{\partial s'}$$

ou

$$(415) \qquad \mathfrak{s}' = -H,$$

suivant que l'axe des x est perpendiculaire à ds' ou à r. D'ailleurs, $\mathcal{R}$ ne pouvant dépendre que des quatre variables (410), l'équation (414) montre que H ne peut contenir que r et $\frac{\partial r}{\partial s}$. On a donc

$$(416)\qquad \mathcal{S} = \frac{\partial \mathrm{K}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

$$(417)\qquad \mathcal{S}' = -\mathrm{H}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

$$(418)\qquad \frac{\mathcal{R}}{r} = \frac{\partial \mathrm{H}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}.$$

On voit que les fonctions H et K restent complètement arbitraires.

En vertu de (416), (417) et (418), l'équation (412) devient

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s'}(x - x') + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial s} - \mathrm{H}\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial\left[\mathrm{H}(x - x') + \mathrm{K}\frac{\partial x}{\partial s}\right]}{\partial s'}.$$

Substituant dans (404), on obtient la première des trois équations (419)

$$(419)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mathrm{X}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial x} + \mathrm{K}\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\
\mathrm{Y} &= \mathrm{Y}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial y} + \mathrm{K}\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\
\mathrm{Z} &= \mathrm{Z}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial z} + \mathrm{K}\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial s'};
\end{aligned}\right.$$

$$(420)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial x} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\
\mathrm{M}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\
\mathrm{N}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial z} + \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial s'}.
\end{aligned}\right.$$

La seconde équation (408) donnera (420), comme la première a donné (419), et H, K, P, Q sont quatre fonctions arbitraires de r et $\frac{\partial r}{\partial s}$.

240. *Les formules de M. Reynard sont les seules qui satisfassent à ses hypothèses et au principe* (n° **232**).

On va le voir par les formules (419) et (420). Les hypothèses de M. Reynard sont les suivantes :

241. L'action de I'ds' sur Ids se réduit à une force unique, appliquée à ds.

242. Cette action est normale à ds.

243. Elle est dans le plan passant par r et ds'.

244. Elle change seulement de sens, en même temps que Ids.

Voici la démonstration de l'énoncé **240** :

En vertu de l'hypothèse **241**, le couple (420) est nul. On déduit du n° **242**

$$X\frac{\partial x}{\partial s}+Y\frac{\partial y}{\partial s}+Z\frac{\partial z}{\partial s}=0, \tag{421}$$

du n° **243**, $\delta = 0$ (notation 411), ou (413)

$$\frac{\partial K}{\partial s'}=0;$$

K disparaît donc des composantes (419) qui, substituées dans (421), donnent

$$X_0\frac{\partial x}{\partial s}+Y_0\frac{\partial y}{\partial s}+Z_0\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial\left[\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}\right]}{\partial s'}=0.$$

En vertu des équations (379), la somme des trois premiers termes de cette équation est nulle, et elle exprime que la fonction $\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}$, qui

ne peut dépendre que de r et de $\frac{\partial r}{\partial s}$, en est indépendante, puisqu'elle l'est de s', et se réduit à une constante.

La condition (nº **244**) exige que X, Y, Z et, par suite, H soient des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, par suite, de $\frac{\partial r}{\partial s}$; d'où

$$H\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right) = f(r)\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Mais $\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s} = rf(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$ ne peut être constante sans être nulle; donc

$$H = 0,$$

et la force (419) se réduit à celle de M. Reynard; ce qui démontre (nº **240**).

§ XIV. — Actions pondéromotrices reçues et produites par les courants fermés permanents, a plusieurs dimensions.

245. *Quinzième principe.* — Un courant permanent, à plusieurs dimensions, est décomposable en courants linéaires, c'est-à-dire à sections infiniment petites.

Ce principe pourrait être démontré rigoureusement par des expériences précises, qui n'ont pas été faites, mais qui n'ont pas été jugées utiles : les physiciens l'admettent avec confiance comme suffisamment démontré par des conséquences variées, qui sont bien établies.

246. L'*intensité linéaire* d'un courant permanent isolé, soit matériellement dans un fil, soit par la pensée dans un tube de flux, sera définie, dans l'hypothèse de deux fluides, comme dans celle d'un seul, la somme des flux d'électricité, pris en valeur absolue, qui en traversent chaque section dans l'unité de temps.

247. Un courant à trois dimensions est *fermé* quand l'électricité n'en traverse pas la surface, et *permanent* quand il est composé de courants linéaires permanents, fixes par rapport à son volume.

248. Lemme. — *Si un courant fermé, à plusieurs dimensions, est décomposable en courants linéaires, il l'est aussi en courants linéaires fermés, pourvu qu'on lui adjoigne un certain système de courants fictifs, dont les éléments sont deux à deux égaux, superposés et de sens contraires.*

En effet, le volume ϖ d'un courant fermé $\mathcal{C}'$ peut toujours être décomposé en plusieurs parties ϖ_1, ϖ_2, ..., assez petites pour que toute ligne du courant, qui a des points dans l'une d'elles, ait un point d'entrée et un point de sortie sur sa surface. L'élément de surface $d\lambda_{pq}$, par lequel un courant linéaire, d'intensité I, sort de ϖ_p et entre dans ϖ_q, étant pris pour base d'un cône, dont le sommet O est arbitraire, soient deux courants fictifs, d'intensité I, passant dans ce cône en sens contraires. Cette construction, répétée pour tous les éléments de séparation $d\lambda$ et pour toutes les cloisons λ, fera correspondre à tout courant linéaire, d'intensité I, qui traverse ϖ_p de λ_{pq} à λ_{qr}, un courant linéaire, d'intensité I, circulant dans le canal fermé $O\lambda_{pq}\lambda_{qr}O$, et définit un système de courants linéaires fermés, satisfaisant à l'énoncé du n° **248**.

248'. On voit qu'un énoncé et une démonstration analogues s'appliquent au cas de deux dimensions.

Notations de l'intensité cubique et des composantes d'un courant à trois dimensions.

La notation

$$\text{(422)} \qquad \mathrm{I}\,ds$$

va désigner, comme précédemment, un élément de courant linéaire, d'intensité I et de longueur ds, mais faisant partie d'un courant à trois dimensions.

249. L'*intensité cubique* d'un courant à trois dimensions, au point (x, y, z), est l'intensité linéaire, rapportée à l'unité de surface, du courant linéaire I, qui traverse un élément $d\omega$ du plan normal à la ligne

du courant passant par ce point :

(423) $$i = \frac{I}{d\omega}.$$

L'élément I ds de courant linéaire, qui a pour section droite ω et pour longueur ds, ayant pour volume

(424) $$d\varpi = d\omega\, ds,$$

on a, en multipliant membre à membre (423) et (424),

(425) $$i\, d\varpi = I\, ds.$$

250. La *composante* j d'un courant à trois dimensions, au point $M(x, y, z)$, dans une direction $\mathcal{L}$, définie par ses cosinus α, β, γ, et qu'on peut toujours regarder comme la normale positive d'une surface Λ, passant par M, est l'intensité I du courant linéaire qui traverse en ce point un élément $d\Lambda$ de cette surface, intensité rapportée à l'unité de surface et affectée du signe de la région où le courant s'introduit :

(426) $$j = \pm \frac{I}{d\Lambda}.$$

251. Les *trois composantes* u, v, w d'un courant à trois dimensions, au point (x, y, z), sont les composantes de ce courant dans les directions positives des trois axes.

La formule (426), appliquée à un courant linéaire I, qui entre par la face rectangulaire $d\Lambda = dx\, dy$, appartenant au plan $z =$ une constante z_0, dans un parallélépipède oblique ayant pour arêtes latérales des lignes du courant, et qui en sort par la face comprise dans le plan $z = z_0 + dz$, devient

$$w = \pm \frac{I}{dx\, dy}.$$

Le volume du parallélépipède, essentiellement positif, ainsi que dx et dy, est

$$d\varpi = \pm\, dx\, dy\, dz.$$

Multipliant membre à membre ces deux équations et observant que leurs seconds membres ont tous deux le signe de dz en évidence, on obtient la troisième des formules suivantes :

$$(427) \qquad u\,d\varpi = \mathrm{I}\,dx, \quad v\,d\varpi = \mathrm{I}\,dy, \quad w\,d\varpi = \mathrm{I}\,dz;$$

et, en éliminant $\frac{\mathrm{I}}{d\varpi}$ au moyen de l'équation (425),

$$(428) \qquad u = i\frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = i\frac{\partial y}{\partial s}, \quad w = i\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Donc la composante **250** du courant, dans une direction quelconque ζ, est la projection de son intensité cubique sur cette direction

$$(429) \qquad j = i\frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

ou

$$j = i\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \cdots\right)$$

ou, en substituant (428),

$$j = u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \cdots$$

ou [notations **250**]

$$(430) \qquad j = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Action d'un système M', fixe et invariable dans sa constitution physique, sur un élément extérieur $i\,d\varpi$ de courant à trois dimensions, fixe et permanent.

252. Les formules (11) et (50) donnent immédiatement, à l'aide des substitutions (425) et (427), les composantes de cette action, qui se réduit à une force unique appliquée à l'élément de volume $i\,d\varpi$,

$$(431) \qquad \begin{cases} (M', i\,d\varpi)_x = (\mathrm{C}_{M'}v - \mathrm{B}_{M'}w)\,d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_y = (\mathrm{A}_{M'}w - \mathrm{C}_{M'}u)\,d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_z = (\mathrm{B}_{M'}u - \mathrm{A}_{M'}v)\,d\varpi; \end{cases}$$

$$(431') \quad \begin{cases} (M', i\,d\varpi)_x = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial y} w - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial z} v\right) d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_y = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial z} u - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial x} w\right) d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_z = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial x} v - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial y} u\right) d\varpi. \end{cases}$$

Propriétés de l'axe et du moment d'un courant fermé à trois dimensions.

253. Il résulte du lemme **248** que les actions d'un système fixe M', pouvant comprendre des courants fermés, des aimants dont l'aimantation est rigide, et le magnétisme terrestre, sur un courant fermé, fixe et permanent, $\mathcal{C}$, à trois dimensions, se déduisent de (119) en remplaçant le courant $\mathcal{C}$ par le système de courants linéaires dans lesquels on peut le décomposer. Il suffit de faire, dans les formules (119) et suivantes, les substitutions (425) et (427).

Soit ϖ le volume du courant $\mathcal{C}$. Son *moment* k_0 et son *axe* $\mathcal{L}_0$ sont définis par les formules (121), pourvu qu'on y fasse les substitutions (427), et qui deviennent les suivantes :

$$(432) \quad \begin{cases} \alpha_0 \mathrm{k}_0 = \underset{\varpi}{\iiint} y w\, d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} z v\, d\varpi, \\ \beta_0 \mathrm{k}_0 = \underset{\varpi}{\iiint} z u\, d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} x w\, d\varpi, \\ \gamma_0 \mathrm{k}_0 = \underset{\varpi}{\iiint} x v\, d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} y u\, d\varpi. \end{cases}$$

Soit M un point solidaire avec le corps rigide $\mathcal{C}$. Dans chacun des deux cas **96** et **97**, c'est-à-dire lorsque les composantes A, B, C de la force directrice D du système M' sont constantes en tous les points d'un volume comprenant $\mathcal{C}$ et M, ou lorsque ce volume est infiniment petit, l'action de M' sur $\mathcal{C}$ est représentée par l'énergie (122)

$$(433) \quad \mathrm{W}_{M',\mathcal{C}} = -\mathrm{k}_0(\alpha_0 \mathrm{A}_0 + \beta_0 \mathrm{B}_0 + \gamma_0 \mathrm{C}_0) = -\mathrm{k}_0 \mathrm{D}_0 \cos(\mathrm{D}_0, \mathcal{L}_0) = \mathrm{k}_0 \frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathcal{L}_0},$$

dans laquelle A_0, B_0, C_0, D_0, V_0 désignent les valeurs, au point M, de A, B, C, D et du potentiel V de M'.

Les formules (432), et les propriétés qui s'en déduisent (nos **99** à **105**), s'appliquent au cas où $\mathfrak{S}$ désigne un système rigide quelconque de courants fermés, par exemple au système de courants fermés moléculaires qui constitue, dans l'hypothèse d'Ampère, un aimant doué d'un magnétisme rigide, placé dans un champ de force uniforme. Elles s'appliquent aussi à chaque molécule magnétique d'un aimant réel, quand on la suppose mobile autour du point M, lié invariablement à la molécule et à l'aimant, conformément à la théorie de Weber.

Calcul de la partie bien définie $\varphi_{\mathfrak{S}'}$ du potentiel, au point (x, y, z), d'un courant fermé infiniment petit $\mathfrak{S}'$, à trois dimensions.

254. Le moment k'_0, l'axe $\mathfrak{L}'_0$ et les cosinus directeurs de cet axe, $\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0$, étant définis par les formules (432), en y accentuant toutes les lettres, et r désignant la distance du point (x, y, z) au courant $\mathfrak{S}'$, soient μ un pôle de solénoïde indéfini, placé en ce point, et V'_0 son potentiel au point (x'_0, y'_0, z'_0) du même courant. On a (433)

$$W_{\mu, \mathfrak{S}'} = k'_0 \frac{\partial V'_0}{\partial \mathfrak{L}'_0}$$

et, en substituant (234) $\frac{\mu}{r}$ à V'_0,

$$W_{\mu, \mathfrak{S}'} = \mu k'_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}'_0};$$

mais on a aussi (253)

$$W_{\mu, \mathfrak{S}'} = \mu \varphi_{\mathfrak{S}'};$$

d'où, en identifiant,

$$\varphi_{\mathfrak{S}'} = k'_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}'_0}. \tag{434}$$

Deux systèmes équivalents, dans un volume donné, ayant été définis (no **146**) ceux dont les potentiels ont une différence constante, en tous les points de ce volume, l'équation (434) exprime que l'élément k'_0 de solénoïde, dont l'axe $\mathfrak{L}'_0$ et le moment k'_0 sont définis par les formules (432), équivaut au courant fermé $\mathfrak{S}'$ qui est infiniment petit et

à trois dimensions; et l'équation (433), que l'énergie de $\mathfrak{S}'$, dans le champ de force du système M', est égale à celle de l'élément équivalent de solénoïde.

Calcul des composantes A, B, C *de la force directrice* D *d'un courant* $\mathfrak{S}'$ *à trois dimensions, fermé, fixe et permanent, en un point fixe* (x, y, z), *extérieur à son volume* ϖ'.

255. L'artifice **248**, et la substitution (427) faite dans les formules (82), donnent, pour ces composantes, les expressions (72). D'ailleurs, la méthode (n° **55**), qui a donné le potentiel d'un courant linéaire, s'étend au cas actuel, sans adjonction de courants fictifs.

Soit k (25) le moment d'un élément k de solénoïde fictif dont l'axe $\mathfrak{L}$ commencerait au point (x, y, z) et aurait pour cosinus directeurs α, β, γ. Son potentiel aurait pour partie bien définie (52), au point (x', y', z') où se trouve l'élément $i'\,d\varpi'$ du courant $\mathfrak{S}'$,

$$(435)\qquad \varphi_k = \mathrm{k}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}},$$

et il produirait sur cet élément une force unique, appliquée au point (x', y', z'), ayant (431' et 435) pour projection sur l'axe des x

$$(k, i'\,d\varpi')_x = d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y'} - v'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\varphi_k$$

$$= \mathrm{k}\,d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y'} - v'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}} = -\,\mathrm{k}\,d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y} - v'\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}}$$

ou

$$(436)\qquad (k, i'\,d\varpi')_x = -\,\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{L}}\left(\frac{\partial \frac{w'}{r}\,d\varpi'}{\partial y} - \frac{\partial \frac{v'}{r}\,d\varpi'}{\partial z}\right).$$

Posant

$$(437)\qquad \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{u'}{r}\,d\varpi', \quad \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{v'}{r}\,d\varpi', \quad \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{w'}{r}\,d\varpi',$$

et intégrant (436) pour tous les éléments du volume ϖ' de $\mathfrak{S}'$, on

(438) $$(k, \mathfrak{S}')_x = \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}\right),$$

et (55*)

(439) $$(\mathfrak{S}', k)_x = \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}.$$

Ajoutant les formules (438) et (439), dont les premiers membres se détruisent en vertu du principe de l'action et de la réaction, on a

(440) $$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} + \mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}\right) = 0.$$

Or les expressions (437) étant les potentiels, au point (x, y, z), de trois masses fictives, de volume ϖ' et de densités u', v', w', on sait que leurs dérivées partielles du premier ordre convergent vers zéro avec $\frac{1}{r}$; et $\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}$ ou $-\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}$ jouit (n° **49**) de la même propriété. D'ailleurs, la direction de $\mathfrak{x}$ étant arbitraire dans (440), la parenthèse, à la fois constante en tous les points de l'espace extérieur à $\mathfrak{S}'$ et infiniment petite à l'infini, est identiquement nulle; ce qui démontre la première des trois équations

(441) $$\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z}, \quad \mathrm{B}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}, \quad \mathrm{C}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}.$$

Il en résulte (76) l'expression suivante de la partie bien définie du potentiel de $\mathfrak{S}'$ au point (x, y, z), où se termine une ligne l, menée arbitrairement d'un point quelconque, pris à l'infini,

(442) $$\varphi_{\mathfrak{S}'} = -\int_{-\infty}^{l}\left(\mathrm{A}_1\frac{\partial x_1}{\partial l_1} + \mathrm{B}_1\frac{\partial y_1}{\partial l_1} + \mathrm{C}_1\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\right)dl_1,$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ désignant les valeurs des fonctions (441) au point (x_1, y_1, z_1), où se termine l'arc l_1 qui fait partie de l.

Les formules (23)

(443) $$\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} = -\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}, \quad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} = -\mathrm{B}_{\mathfrak{S}'}, \quad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} = -\mathrm{C}_{\mathfrak{S}'}$$

donnent

$$(444)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} &= \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (437), (441) et (444) pouvaient aussi se déduire immédiatement des formules (82), (73) et (72), à l'aide de la substitution (427) et du lemme **248**.

Énergie de l'action mutuelle de deux courants fermés $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, fixes, permanents et à trois dimensions.

256. Soient ϖ et ϖ' leurs volumes, x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires, dans un système d'axes à gauche, des éléments $i\,d\varpi$, $i'\,d\varpi'$ de ces courants; l'adjonction des courants fictifs du lemme **248** et les substitutions (425), (427) permettent de déduire immédiatement des formules (118) et (118')

$$(445)\quad \mathrm{W}_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\iiint_{\varpi} (\mathrm{F}_{\mathfrak{S}'} u + \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'} v + \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'} w)\, d\varpi,$$

$$(446)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{W}_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} &= -\iiint_{\varpi} d\varpi \iiint_{\varpi'} \frac{uu' + vv' + ww'}{r}\, d\varpi' \\ &= -\iiint_{\varpi} i\, d\varpi \iiint_{\varpi'} i'\, d\varpi' \frac{\cos(i, i')}{r}. \end{aligned}\right.$$

Énergie de l'action mutuelle d'un aimant A', doué d'une aimantation rigide, et d'un courant fermé $\mathfrak{S}'$, permanent et à trois dimensions.

257. On ne change pas (n° **162**) cette énergie en remplaçant les éléments magnétiques de l'aimant par le système équivalent $\mathfrak{S}'$ d'éléments de solénoïdes. On a vu que, en désignant l'aimantation de A' au point (x', y', z') par Φ', ses composantes par $\alpha'\Phi'$, $\beta'\Phi'$, $\gamma'\Phi'$, et po-

sant (199)

$$(447)\quad \begin{cases} \xi = \iiint_{\varpi'} \frac{\alpha'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \eta = \iiint_{\varpi'} \frac{\beta'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \zeta = \iiint_{\varpi'} \frac{\gamma'\Phi'}{r}\, d\varpi', \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \end{cases}$$

les fonctions (437), relatives à ce système $\mathcal{C}'$, ont (204) pour expressions, au point (x, y, z),

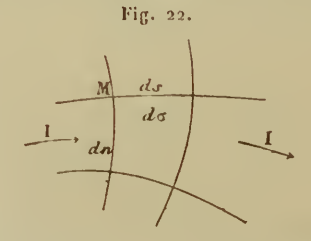
$$(448)\qquad F_{A'} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}, \quad G_{A'} = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad H_{A'} = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

Donc la formule (445) s'applique à l'énergie demandée, quand on y remplace $\mathcal{C}'$ par A',

$$(449)\qquad W_{A',\mathcal{C}} = -\iiint_{\varpi} (F_{A'}u + G_{A'}v + H_{A'}w)\, d\varpi.$$

258. L'*intensité superficielle* I_2, en un point M d'un courant à trois dimensions, parcourant une surface donnée, peut être définie l'intensité,

Fig. 22.



rapportée à l'unité de longueur, du courant linéaire I, qui traverse un élément dn (*fig*. 22) de la trajectoire orthogonale des lignes du courant passant en M :

$$(450)\qquad I_2 = \frac{I}{dn}.$$

L'élément rectangulaire I ds du courant linéaire, qui a pour dimensions dn et ds, ayant pour surface

$$(451)\qquad d\sigma = dn\, ds,$$

on a, en multipliant membre à membre (450) et (451),

$$I_2\,d\sigma = I\,ds. \tag{452}$$

La bobine sphérique $\mathfrak{S}'$ (n° **201**) a été considérée comme un système de courants linéaires, de même intensité linéaire I′, parcourant, dans le sens xy, les petits cercles d'intersection de la sphère, qui a pour centre l'origine et pour rayon ρ', avec des plans, perpendiculaires à l'axe Oz' de la bobine, qui partagent cet axe en éléments égaux dz'. En posant $z' = \rho' \cos\theta'$, on voit que l'élément de méridien projeté suivant dz' a pour longueur $dn' = \frac{dz'}{\sin\theta'}$. A toute distance finie de la sphère, la bobine agit, à l'intérieur et à l'extérieur, comme un courant à deux dimensions, dont les lignes sont de révolution autour de Oz, et dont l'intensité superficielle est $I'_2 = \frac{I'}{dn'}$ ou $I'_2 = \frac{I'}{dz'}\sin\theta'$. Posant

$$p' = \frac{I'}{dz'}, \tag{453}$$

on a donc

$$I'_2 = p' \sin\theta'. \tag{454}$$

259. Soient O et R′, r' le centre commun et les rayons d'une sphère creuse, parcourue en tous ses points, dans le sens xy, par un courant $\mathfrak{S}'$ à trois dimensions, dont les lignes sont de révolution autour de son rayon Oz. Pour qu'elle soit décomposable en bobines sphériques, dont l'une $d\mathfrak{S}'$, comprise entre les sphères de rayons ρ' et $\rho' + d\rho'$, ait pour intensité superficielle l'expression (454), il faut et il suffit que le coefficient p' soit constant dans toute cette bobine $d\mathfrak{S}'$, c'est-à-dire que ce coefficient, d'ailleurs proportionnel à $d\rho'$, soit de la forme

$$p' = f(\rho')\,d\rho';$$

d'où

$$I'_2 = f(\rho') \sin\theta'\,d\rho', \tag{455}$$

ou que l'expression (423) de l'intensité cubique,

$$i' = \frac{I'}{dn'\,d\rho'} = \frac{I'_2}{d\rho'}, \tag{456}$$

ainsi transformée par la formule (450), soit de la forme

(457) $$i' = f(\rho')\sin\theta'.$$

Soit

(458) $$f(\rho') = q'\rho', \quad q' = \text{const.};$$

d'où

(459) $$i' = q'\rho'\sin\theta',$$

(460) $$I'_2 = q'\rho'\sin\theta'\,d\rho',$$

(461) $$\frac{I'}{d\sigma'} = q'\rho'\,d\rho'.$$

Au point (x, y, z), dont la distance $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ au centre de la sphère est plus grande que son rayon R′, la partie bien définie du potentiel du courant (n° **259**) est (260 et 282)

(462) $$\varphi_{\text{ext}} = K'_0 \frac{z}{a^3},$$

(463) $$K'_0 = \frac{4}{3}\pi \int_{r'}^{R'} \rho'^3 \frac{I'}{d\sigma'},$$

ou, en substituant (461),

(464) $$K'_0 = \frac{4}{3}\pi q' \int_{r'}^{R'} \rho'^4\,d\rho' = \frac{4}{15}\pi q'(R'^5 - r'^5).$$

260. Pour $a < R'$, c'est-à-dire en un point (x, y, z) intérieur à la sphère, l'action qu'elle exerce ne peut être calculée sans hypothèse. Celle qui va être faite (n° **262**) revient ici à supposer que la bobine sphérique $d\sigma'$ (n° **259**), qui est comprise entre les sphères de rayons $a + \varepsilon$ et $a - \varepsilon$, et qui produit des actions infiniment petites, comme proportionnelles à son épaisseur 2ε, en tout point, soit intérieur à la plus petite, soit extérieur à la plus grande, produit aussi une action infiniment petite au point (x, y, z); et l'action de σ' en ce point se calculera en faisant abstraction de $d\sigma'$.

Alors la partie restante de σ' aura, au point (x, y, z) de sa cavité,

un potentiel, dont la partie bien définie sera

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{S}'} = \mathcal{V}_e + \mathcal{V}_i, \tag{465}$$

$\mathcal{V}_e$ provenant de la sphère creuse, de rayons r' et $a_1 = a - \varepsilon$, et $\mathcal{V}_i$ de la partie comprise entre les surfaces sphériques qui ont pour rayons $a_2 = a + \varepsilon$ et R'; et l'action du courant $\mathfrak{S}'$ sur un élément de courant ou une molécule magnétique, placés au point (x, y, z), se calculera par les composantes

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}, \quad \mathrm{B}_{\mathfrak{S}'} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}, \quad \mathrm{C}_{\mathfrak{S}'} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} \tag{466}$$

de la force directrice de $\mathfrak{S}'$ en ce point, en traitant a_1 et a_2 comme des constantes dans les dérivations. Alors on déduira de (462) et (464)

$$\mathcal{V}_e = \frac{4}{15}\pi q'(a_1^5 - r'^5)_{a_1 = a}\,\frac{z}{a^3}, \tag{467}$$

et de (281)

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= -\frac{8}{3}\pi z \int_{\rho' = a_2}^{\rho' = R'} \frac{\mathrm{I}'}{dz'} \\ &= -\frac{8}{3}\pi q' z \int_{a_2}^{R'} \rho'\,d\rho' = -\frac{4}{3}\pi q' z (R'^2 - a_2^2)_{a_2 = a}. \end{aligned}\right. \tag{468}$$

(465) devient

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi q' z \left(\frac{a_1^5 - r'^5}{5a^3} - R'^2 + a_2^2\right)_{a_1 = a_2 = a}; \tag{469}$$

d'où (466)

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathfrak{S}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\, 3xz\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right), \\ \mathrm{B}_{\mathfrak{S}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\, 3yz\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right), \\ \mathrm{C}_{\mathfrak{S}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\left[3z^2\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right) - 6a^2 + 5R'^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{470}$$

Pour une sphère pleine,

$$(471)\quad \begin{cases} D_{\varpi'} = \sqrt{(A^2_{\varpi'} + B^2_{\varpi'} + C^2_{\varpi'})_{r'=0}} \\ \quad = \frac{4}{15}\pi q' \sqrt{3(10R'^2 - 9a^2)z^2 + (5R'^2 - 6a^2)^2}. \end{cases}$$

261. La fonction (469) ne satisfait pas à la définition (23) d'un potentiel : elle renferme, outre x, y et z, deux variables a_1, a_2, indépendantes des trois premières dans le calcul des dérivées qui représentent l'action au point (x, y, z) : en sorte que, pour calculer l'action en un autre point, il faudrait donner à a_1 et a_2 d'autres valeurs. On va voir en effet (§ XV) qu'un courant fermé, à trois dimensions, n'a pas de potentiel en un point intérieur, et il n'y aura pas de contradiction. La fonction (469) est de même nature que celle qui a été définie (nº **171**) sous le nom de *potentiel local* du magnétisme terrestre, sans examiner si le magnétisme terrestre a un potentiel.

L'équation (471) donne, pour la force directrice à la surface, en y faisant $a = R'$,

$$(472)\qquad D = \frac{4}{15}\pi q' R' \sqrt{3z^2 + R'^2}.$$

Au pôle,

$$z^2 = R'^2;$$

d'où

$$D = \frac{8}{15}\pi q' R'^2.$$

Or, au pôle magnétique de la Terre, l'intensité totale a été trouvée égale à 14 unités anglaises ou $10^{\bar{1},81\ldots}$ C.G.S. Si donc on attribuait le magnétisme terrestre à un courant sphérique, et, si la loi de l'intensité cubique satisfaisait à l'équation (459), cette intensité, à la surface, serait $i' = q'R' \sin\theta'$; d'où, en substituant la valeur de q', tirée de l'équation (472),

$$i' = \frac{15 D}{8\pi R'} \sin\theta'$$

et, en adoptant la valeur $D = 10^{\bar{1},81\ldots}$,

$$i' = 10^{\bar{9},781\ldots} \sin\theta' \text{ C.G.S.} = 10^{\bar{8},781\ldots} \sin\theta'^{\text{amp}}.$$

Cette intensité est rapportée au centimètre carré; ce qui donne $6^{\text{amp}},04 \sin\theta'$, soit $6^{\text{amp}} \sin\theta'$ par hectare. Ce courant marcherait vers l'ouest magnétique.

§ XV. — Actions pondéromotrices d'un courant permanent, a trois dimensions, sur les courants intérieurs a son volume.

Actions sur un élément de courant intérieur.

Un seul principe (n° **245**) a suffi pour calculer les forces pondéromotrices reçues et produites par les courants fermés permanents, dans le cas où le corps, qui reçoit l'action, ne fait pas partie du système agissant. Une hypothèse est indispensable pour aborder le cas contraire.

262. L'action d'un courant fermé, à trois dimensions, $\mathfrak{S}'$, sur un élément de courant intérieur

$$\mathrm{I}\,ds = i\,d\varpi \qquad (425),$$

sera regardée comme calculable par les équations (11) ou (431), démontrées pour le cas où l'élément est en dehors du courant agissant.

Cette hypothèse est vérifiée par toutes les formules proposées jusqu'ici pour représenter l'action mutuelle de deux éléments de courants; car elles donnent, pour l'action d'une partie infiniment petite de $\mathfrak{S}'$ sur un élément de courant intérieur, une force unique, appliquée à cet élément, infiniment petite par rapport au produit $i\,d\varpi$, et dès lors par rapport à l'action du reste de $\mathfrak{S}'$.

Il résulte de l'hypothèse **262** que l'action d'un courant fermé permanent $\mathfrak{S}'$, à trois dimensions, sur un de ses éléments $i\,d\varpi$, se réduit à une force unique, représentée, dans un système rectangulaire d'axes à gauche, par les formules (431)

$$(473)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{S}', i\,d\varpi)_x = (\mathrm{C}v - \mathrm{B}w)\,d\varpi, \\ (\mathfrak{S}', i\,d\varpi)_y = (\mathrm{A}w - \mathrm{C}v)\,d\varpi, \\ (\mathfrak{S}', i\,d\varpi)_z = (\mathrm{B}u - \mathrm{A}w)\,d\varpi, \end{cases}$$

en posant

$$(474)\qquad A=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z},\quad B=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\quad C=\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\qquad(441)$$

et

$$(475)\quad F=\iiint_{\varpi'}\frac{u'}{r}\,d\varpi',\quad G=\iiint_{\varpi'}\frac{v'}{r}\,d\varpi',\quad H=\iiint_{\varpi'}\frac{w'}{r}\,d\varpi'\quad(437),$$

formules dans lesquelles ϖ' désigne le volume de $\mathfrak{C}'$, r la distance du point (x, y, z) de l'élément $d\varpi$ au point (x', y', z') de l'élément $d\varpi'$, et u', v', w' les composantes du courant en ce dernier point.

L'hypothèse **262** est admissible, pourvu que les fonctions (474) soient finies et déterminées. Or c'est ce qui résulte de la théorie bien connue des attractions réciproques aux carrés des distances, dans laquelle les fonctions (475) sont les potentiels, au point (x, y, z), de trois masses fictives, de volume ϖ', ayant, au point (x, y, z), les densités u', v', w'. On sait que leurs dérivées partielles du premier ordre sont finies et déterminées, même à l'intérieur des masses agissantes.

263. Quand on admet les formules de M. Reynard (379 et 380), les formules (473), (474) et (475) s'étendent au cas où le courant $\mathfrak{C}'$ n'est pas fermé; car alors les formules (373), (374), (377) et (378) s'étendent au cas où la ligne S′ n'est pas fermée. Si on la désigne par s', on déduit des équations (377)

$$(476)\qquad\left\{\begin{aligned}(\Sigma I's', I\,ds)_x&=I(C\,dy-B\,dz),\\(\Sigma I's', I\,ds)_y&=I(A\,dz-C\,dx),\\(\Sigma I's', I\,ds)_z&=I(B\,dx-A\,dy),\end{aligned}\right.$$

en étendant le signe Σ à tous les courants linéaires non fermés $I's'$ dans lesquels $\mathfrak{C}'$ se décompose, et posant (374 et 373)

$$(474')\qquad A=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z},\quad B=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\quad C=\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(477)\quad F=\sum I'\int_0^{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\,ds',\quad G=\sum I'\int_0^{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'}\,ds',\quad H=\sum I'\int_0^{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}\,ds'.$$

On voit que les formules (476), (474′) et (477) deviennent (473), (474) et (475), quand on y substitue (427),

$$(478)\qquad \mathrm{I}\,dx = u\,d\varpi,\quad \mathrm{I}\,dy = v\,d\varpi,\quad \mathrm{I}\,dz = w\,d\varpi.$$

Énergie $\mathrm{W}_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}}$ de l'action d'un courant fermé permanent $\mathfrak{S}'$, à trois dimensions, sur un courant fermé $\mathfrak{S}$, dont la ligne S *est flexible et inextensible, mais dont l'intensité* I *reste constante.*

264. Cette énergie a été calculée (n° **89**) en supposant tous les points du courant, qui reçoit l'action, extérieurs à $\mathfrak{S}'$. Il s'agit uniquement d'étendre tout ce qui a été établi, dans le § IV, au cas où la ligne S est, tout entière ou en partie, à l'intérieur de $\mathfrak{S}'$. Par une conception abstraite, il faut réduire S à une ligne géométrique, dont le courant est parfaitement isolé de $\mathfrak{S}'$, de manière que les deux courants coexistent, sans que la présence de l'un modifie la marche de l'autre. Or toutes les propriétés établies dans le § IV reposent sur les formules (11) et (20) : les premières ont lieu, par hypothèse (n° **262**), dans le cas actuel ; et la dernière,

$$(479)\qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z} = 0,$$

se déduit immédiatement des équations (474). L'action de $\mathfrak{S}'$ sur $\mathfrak{S}$ est donc encore exprimable par une énergie

$$(480)\qquad \mathrm{W}_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\,\mathrm{I}\iint_{\Lambda}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)\,d\Lambda$$

ou

$$(481)\qquad \mathrm{W}_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\,\mathrm{I}\varepsilon_{\Lambda} = -\,\mathrm{I}\varepsilon_{\mathrm{S}};$$

$$(482)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\Lambda}\quad \text{ou}\quad \varepsilon_{\mathrm{S}}$$

désignant les cosinus directeurs de la normale positive de $d\Lambda$, et le flux de force que $\mathfrak{S}'$ envoie sur la face négative de Λ, et qui ne dépend que du contour S de cette aire, comme l'exprime la notation ε_{S}.

265. L'énergie (480) représente encore le travail virtuel de l'action de $\mathcal{C}'$ sur le courant $\mathcal{C}$, déformé sans faire varier I, jusqu'à ce que son aire A s'évanouisse. Elle a encore pour expression (109‴)

$$(483)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\,\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathrm{G}\frac{\partial y}{\partial s} + \mathrm{H}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds,$$

F, G, H étant les fonctions (475); d'où

$$(484)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\,\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}} ds \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} \frac{d\varpi'}{r}\left(u'\frac{\partial x}{\partial s} + v'\frac{\partial y}{\partial s} + w'\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

$$(485)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\,\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}} ds \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} \frac{i'}{r}\cos(\mathrm{I}, i')\,d\varpi'.$$

Au moyen des substitutions (427), les trois formules (483), (484), (485) donnent, pour l'énergie des actions électrodynamiques qu'un courant fermé $\mathcal{C}'$ exerce sur lui-même, $d\varpi$, $d\varpi'$ désignant deux éléments de son volume ϖ' :

$$(486)\qquad \left\{\begin{aligned} W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}'} &= -\underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'}(\mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' + \mathrm{H}w')\,d\varpi' \\ &= -\underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} d\varpi \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} \frac{uu' + vv' + ww'}{r}\,d\varpi' \\ &= -\underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} i\,d\varpi \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{\varpi'} i'\,d\varpi'\,\frac{\cos(i, i')}{r}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (480) comprend le cas d'un élément k de solénoïde, rigide et permanent, dont l'intensité I est constante, et dont le fil conducteur est réduit à une ligne géométrique S, parfaitement isolée, en sorte que les deux courants $\mathcal{C}'$ et k coexistent, sans que l'un modifie la marche de l'autre. λ désignant son aire, $\mathrm{k} = \mathrm{I}\lambda$ son moment, et α, β, γ les cosinus directeurs de son axe $\mathcal{L}$, (480) devient

$$(487)\qquad W_{\mathcal{C}',k} = -\,\mathrm{k}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma),$$

$$(487')\qquad W_{\mathcal{C}',k} = -\,\mathrm{k}\mathrm{D}\cos(\mathrm{D}, \mathcal{L}).$$

Les équations (487) et (122) étant de même forme, l'action de $\mathcal{C}'$ sur k rigide se réduit à une force appliquée à k et à un couple, exprimés par les formules (124) et (125) ou (127).

266. Quand on admet les formules (379) et (380) de M. Reynard, les propriétés et les formules qui précèdent, (480), (482), (483), (484), (485), subsistent pour un courant non fermé et permanent $\mathcal{C}'$, à trois dimensions.

267. *Lemme*. — Étant donné un courant permanent non fermé $\mathcal{C}'$, à trois dimensions, les fonctions (474), quand on y substitue (475), satisfont à l'identité

$$(488)\quad \int_0^{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{A}\,\partial x + \mathrm{B}\,\partial y + \mathrm{C}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \int\!\!\int_{\Lambda} j\,d\Lambda - \int\!\!\int_{\Lambda} d\Lambda\,\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} \int\!\!\int_{\sigma'} \frac{j'\,d\sigma'}{\rho};$$

les notations

$$(489)\qquad \Lambda,\ \mathrm{L},\ \varpi',\ \sigma',\ \mathcal{L},\ \mathcal{L}',\ \rho,\ j,\ j' \quad \text{et} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

étant définies de la manière suivante : Λ désigne une aire quelconque, L son périmètre, parcouru des pieds à la tête d'un observateur qui voit à sa gauche la normale positive $\mathcal{L}$ de $d\Lambda$; ϖ' le volume du courant $\mathcal{C}'$, et σ' sa surface, dont l'élément $d\sigma'$ a sa normale extérieure $\mathcal{L}'$ positive ; ρ la distance de $d\sigma'$ à $d\Lambda$; j, j' (nº **250**) les composantes du courant $\mathcal{C}'$ suivant $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$; et α, β, γ les cosinus directeurs de $\mathcal{L}$.

En effet, on a, pour un système rectangulaire d'axes à gauche, l'identité (7)

$$(490)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{A}\,\partial x + \mathrm{B}\,\partial y + \mathrm{C}\,\partial z}{\partial l}\,dl \\ &\quad = \sum_{\Lambda} \left[\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)\right] d\Lambda \end{aligned}\right.$$

et, en vertu des équations (474),

$$(491)\quad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right).$$

Or la fonction F (475) est le potentiel, au point (x, y, z), de la masse fictive, de volume ϖ', qui a pour densité u en ce point et u' au point (x', y', z'); d'où

(492) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -4\pi u.$$

On peut décomposer le volume ϖ' en plusieurs autres ϖ'_p, ϖ'_q, ..., auxquels correspondent autant de fonctions F_p, F_q, ... de la forme (475), et assez petits pour que toute ligne du courant, qui a des points dans ϖ_p, ait un point d'entrée 1 et un point de sortie 2 sur sa surface σ'_p, et l'on aura

(493) $$\varpi' = \varpi'_p + \varpi'_q + \ldots,$$

(494) $$F = F_p + F_q + \ldots, \quad G = G_p + G_q + \ldots, \quad H = H_p + H_q + \ldots.$$

Or

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\underset{\varpi'_p}{\iiint} \frac{u'}{r}\,d\varpi' = \sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dx' = -\sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,dx',$$

en faisant la substitution (478) et étendant le signe Σ à tous les canaux tronqués qui conduisent les courants d'intensités linéaires I'_p, et dont les volumes ont pour somme ϖ'_p :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial G_p}{\partial y} + \frac{\partial H_p}{\partial z} &= -\sum I'_p \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,dx' + \ldots\right) \\ &= -\sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds' = \sum I'_p \left(\frac{1}{r_{p,1}} - \frac{1}{r_{p,2}}\right), \\ &= \sum \left(-\frac{j''_{p,1}}{r_{p,1}}\,d\sigma'_{p,1} - \frac{j''_{p,2}}{r_{p,2}}\,d\sigma'_{p,2}\right),\end{aligned}$$

en vertu de (426); d'où

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial G_p}{\partial y} + \frac{\partial H_p}{\partial z} = -\sum_{\sigma'_p} \frac{j''_p}{r_p}\,d\sigma'_p,$$

$$\frac{\partial F_q}{\partial x} + \frac{\partial G_q}{\partial y} + \frac{\partial H_q}{\partial z} = -\sum_{\sigma'_q} \frac{j''_q}{r_q}\,d\sigma'_q,$$

....

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, et observant qu'à chaque élément $d\sigma'_{p,2} = d\sigma'_{q,1}$ de la cloison $\sigma'_{p,q}$, qui sépare deux volumes contigus ϖ'_p, ϖ'_q, élément par lequel un même courant, d'intensité I', sort de ϖ'_p et entre dans ϖ'_q, correspondent, sous les signes Σ'_p et Σ'_q, deux termes $\frac{j''_{p,2}}{r_{p,2}} d\sigma'_{p,2}$ ou $\frac{\mathrm{I}'}{r_{p,2}}$ et $\frac{j''_{q,1}}{r_{q,1}} d\sigma'_{q,1}$ ou $\frac{\mathrm{I}'}{r_{q,1}}$ qui se détruisent, $r_{p,2}$ et $r_{q,1}$ étant identiques; on aura (494), en ne conservant que les éléments de σ',

$$(495) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = -\sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma'.$$

Substituant (492) et (495) dans (491), on trouve la première des relations suivantes :

$$(496) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} - 4\pi u = - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \alpha\, d\Lambda = \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\Lambda, \\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} - 4\pi v = - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \beta\, d\Lambda = \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\Lambda, \\ \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - 4\pi w = - \frac{\partial}{\partial z} \sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \gamma\, d\Lambda = \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\Lambda. \end{array} \right.$$

Multipliant chaque équation par celle qui se trouve sur la même ligne, et ajoutant les trois produits, on trouve une équation relative à un élément quelconque $d\Lambda$, dans laquelle on substituera (430) : et la somme de toutes les équations analogues, étendue à tous les éléments de l'aire Λ, donne

$$(497) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\Lambda} \left[\alpha \left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} \right) \right] d\Lambda \\ \quad = 4\pi \sum_{\Lambda} j\, d\Lambda - \sum_{\Lambda} d\Lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma'. \end{array} \right.$$

On voit que (490) et (497) démontrent (488).

Conséquences du lemme 267, dans le cas où le courant $\mathfrak{S}'$ est fermé.

268. Si le courant $\mathfrak{S}'$ est fermé, on a, par définition, $j' = 0$ pour tous les éléments $d\sigma'$ de sa surface; alors les équations (490) et (496) deviennent

(498) $$\int_0^L \frac{A_{\mathfrak{S}'}\,\partial x + B_{\mathfrak{S}'}\,\partial y + C_{\mathfrak{S}'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \sum_{A} j\,dA,$$

(499) $$\frac{\partial C_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} = 4\pi u, \quad \frac{\partial A_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} = 4\pi v, \quad \frac{\partial B_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} = 4\pi w.$$

Dans ces formules (498) et (499), rien n'empêche de supposer que le courant fermé $\mathfrak{S}'$ est composé de plusieurs parties séparées, et comprend tous les courants existant dans l'espace. Soient

(500) $$D_{\mathcal{A}'} \text{ et } A_{\mathcal{A}'},\ B_{\mathcal{A}'},\ C_{\mathcal{A}'}; \quad D_{T'} \text{ et } A_{T'},\ B_{T'},\ C_{T'}$$

les forces directrices et leurs composantes, au point (x, y, z), forces dues au système $\mathcal{A}'$ de tous les aimants existant dans l'espace, et du magnétisme terrestre T'. Le système $\mathcal{A}'$ ayant un potentiel en tout point de l'espace, on a, en tous les points de l'aire A,

(501) $$\frac{\partial C_{\mathcal{A}'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{\mathcal{A}'}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A_{\mathcal{A}'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{\mathcal{A}'}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial B_{\mathcal{A}'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\mathcal{A}'}}{\partial y} = 0;$$

et l'équation (490) donne

(502) $$\int_0^L \frac{A_{\mathcal{A}'}\,\partial x + B_{\mathcal{A}'}\,\partial y + C_{\mathcal{A}'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 0.$$

Si l'aire A a des dimensions assez petites, par rapport à celles de la Terre, $A_{T'}$, $B_{T'}$, $C_{T'}$ peuvent y être regardées comme constantes, et leurs dérivées comme nulles. Dans ce cas, on a sensiblement, en vertu de (490),

(503) $$\int_0^L \frac{A_{T'}\,\partial x + B_{T'}\,\partial y + C_{T'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 0.$$

La force directrice $D_{M'}$ du système M' de tous les corps existant dans l'espace, et agissant au point (x, y, z), a pour composantes, en ce point,

$$(504)\quad \begin{cases} A_{M'} = A_{\mathfrak{S}'} + A_{A'} + A_{T'}, \\ B_{M'} = B_{\mathfrak{S}'} + B_{A'} + B_{T'}, \\ C_{M'} = C_{\mathfrak{S}'} + C_{A'} + C_{T'}. \end{cases}$$

Ajoutant membre à membre (498), (502) et (503) et substituant (504), on a

$$(505)\qquad \int_0^L \frac{A_{M'}\,\partial x + B_{M'}\,\partial y + C_{M'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \sum_{\Lambda} j\,d\Lambda.$$

Ajoutant membre à membre (499) et (501), et considérant seulement le cas où l'on peut traiter comme nulles les dérivées premières de $A_{T'}$, $B_{T'}$ et $C_{T'}$, on a, en substituant (504),

$$(506)\ \frac{\partial C_{M'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{M'}}{\partial z} = 4\pi u,\quad \frac{\partial A_{M'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{M'}}{\partial x} = 4\pi v,\quad \frac{\partial B_{M'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{M'}}{\partial y} = 4\pi w.$$

On déduit de (505) le principe suivant :

269. Pour que le système M' de tous les corps produisant des forces pondéromotrices observables ait un potentiel V, bien déterminé en tous les points d'un volume donné ϖ, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de courant électrique à l'intérieur de ce volume.

Cette condition est nécessaire; car, si l'aire Λ a tous ses points dans un volume ϖ, où elle est satisfaite, l'intégrale (505), étendue à tout le périmètre d'un élément de surface $d\Lambda$, intérieur à ϖ, sera identiquement nulle; et, le second membre $4\pi j\,d\Lambda$ l'étant aussi, on aura $j = 0$. Ainsi l'électricité ne peut traverser aucun élément de surface intérieur à ϖ.

Réciproquement, s'il n'existe aucun courant dans le volume ϖ, on a vu (22) que le système M' a, en tout point (x, y, z) de ce volume, un potentiel V, fonction des trois variables indépendantes (x, y, z), ayant

pour différentielle totale

$$dV = -A_{M'}\,dx - B_{M'}\,dy - C_{M'}\,dz.$$

Les équations (506) ont été données par Maxwell (vol. II, p. 231), sous le nom d'*équations des courants électriques*.

270. Si l'aire A a des dimensions comparables à celles de la Terre, on ne peut plus y regarder $A_{T''}$, $B_{T''}$, $C_{T''}$ comme constantes; et l'usage de l'équation (505) cesse d'être légitime. Alors, soient $\mathfrak{M}'$ le système de tous les courants et de tous les aimants existant dans l'univers, $D_{\mathfrak{M}'}$ sa force directrice au point (x, y, z); les composantes de cette force sont

$$(507)\quad A_{\mathfrak{M}'} = A_{\mathfrak{S}'} + A_{\mathcal{A}'},\quad B_{\mathfrak{M}'} = B_{\mathfrak{S}'} + B_{\mathcal{A}'},\quad C_{\mathfrak{M}'} = C_{\mathfrak{S}'} + C_{\mathcal{A}'}.$$

Au moyen de ces notations, on a, en ajoutant membre à membre (498) et (502), puis (499) et (501),

$$(508)\qquad \int_0^L \frac{A_{\mathfrak{M}'}\,\partial x + B_{\mathfrak{M}'}\,\partial y + C_{\mathfrak{M}'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \sum_{A} j\,dA,$$

$$(509)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial C_{\mathfrak{M}'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{\mathfrak{M}'}}{\partial z} &= 4\pi u,\\ \frac{\partial A_{\mathfrak{M}'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{\mathfrak{M}'}}{\partial x} &= 4\pi v,\\ \frac{\partial B_{\mathfrak{M}'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\mathfrak{M}'}}{\partial y} &= 4\pi w. \end{aligned}\right.$$

271. L'équation (508) pourrait servir à calculer l'intensité totale du courant électrique qui traverse, à un instant donné t, une aire A, prise à la surface ou dans l'intérieur de la Terre, en assimilant le magnétisme terrestre au système $\mathfrak{M}'$, c'est-à-dire en admettant qu'il soit dû uniquement à des courants électriques et à des aimants, seuls corps connus qui produisent des forces pondéromotrices, si l'on pouvait en mesurer les composantes $A_{\mathfrak{M}'}$, $B_{\mathfrak{M}'}$, $C_{\mathfrak{M}'}$, à l'instant t, en des points pris sur le contour L de A, et assez nombreux pour donner une valeur approchée de l'intégrale (508). Les équations (509) donneraient les

composantes, en un point, de l'intensité cubique des courants, soit telluriques, soit atmosphériques, si l'on connaissait les lois des variations des composantes $A_{\mathfrak{M}'}$, $B_{\mathfrak{M}'}$, $C_{\mathfrak{M}'}$, en fonction des coordonnées géographiques et de l'altitude. Les physiciens regardent aujourd'hui les courants atmosphériques comme nuls, ce qui fournirait des relations entre les observations magnétiques. Mais il en est autrement des courants telluriques : par des mesures simultanées, faites à la surface et à l'intérieur de la Terre, on étudierait ces courants; ce qu'on ne peut faire par la différence de potentiel entre le sol et une extrémité d'un fil métallique isolé, dont l'autre extrémité communique avec la Terre.

Action d'un courant fermé fixe et permanent $\mathcal{C}'$, à trois dimensions, sur un solénoïde fixe et fermé $\mathcal{S}$.

272. Soient L une ligne fermée, et $\mathfrak{L}$ un arc qui en fait partie. Si les tangentes positives de L sont les axes d'autant d'éléments k de solénoïdes, d'intensités 1, dont les aires λ partagent L en éléments $\delta\mathfrak{L}$, et si, en tous les points de L,

$$(510) \qquad \frac{1\lambda}{\delta\mathfrak{L}} = \text{une constante } \mu, \qquad (8)$$

tous les éléments k de solénoïde constitueront un solénoïde fermé $\mathcal{S}$, dont l'axe sera L. Il faut supposer encore que ces courants, parfaitement isolés, sont des lignes géométriques, dont la présence ne modifie en rien la marche de $\mathcal{C}'$. Il résulte de la formule (247) que $\mathcal{C}'$ n'agit pas sur le solénoïde $\mathcal{S}$, quand celui-ci est tout entier en dehors de $\mathcal{C}'$. Mais on va voir qu'il agit dans le cas contraire.

En effet, les actions mutuelles de $\mathcal{C}'$ et d'un élément k du solénoïde $\mathcal{S}$ étant représentées par l'énergie (487)

$$(511) \qquad W_{\mathcal{C}',k} = -\mu\frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial\mathfrak{L}}\,\delta\mathfrak{L},$$

les actions mutuelles des corps $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{S}$ le sont par l'énergie

$$(512) \qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{S}} = -\mu\int_0^L \frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial\mathfrak{L}}\,d\mathfrak{L},$$

et, en substituant (498),

$$(513) \qquad W_{\mathfrak{C}',\mathrm{S}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} j\,d\Lambda,$$

Λ désignant une nappe de surface assujettie uniquement à avoir $\mathfrak{L}$ pour périmètre. L'équation (429) pouvant s'écrire

$$(514) \qquad j = i\cos(i, \mathfrak{L}),$$

on a aussi

$$(515) \qquad W_{\mathfrak{C}',\mathrm{S}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} i\cos(i, \mathfrak{L})\,d\Lambda.$$

Or l'énergie de l'action de $\mathfrak{C}'$ sur un courant linéaire fictif $\mathfrak{C}$, d'intensité $4\pi\mu$, qui parcourrait L dans le sens positif, est

$$(516) \qquad W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} \mathrm{D}\cos(\mathrm{D}, \mathfrak{L})\,d\Lambda, \qquad (480)$$

en observant que $A\alpha + B\beta + C\gamma = D\cos(D, \mathfrak{L})$. On passe de (516) à (515), en remplaçant la force directrice D de $\mathfrak{C}'$ par l'intensité cubique i au même point, pris sur l'élément $d\Lambda$, ou encore le flux de force $\iint_{\Lambda} D\cos(D, \mathfrak{L})\,d\Lambda$ par le flux d'électricité $\iint_{\Lambda} i\cos(i, \mathfrak{L})\,d\Lambda$, entrant par la face négative de la même aire Λ. On peut donc faire cette substitution dans l'énoncé **265**, et l'on obtient le suivant.

273. L'énergie $W_{\mathfrak{C}',\mathrm{S}}$ (515) représente le travail virtuel de l'action de $\mathfrak{C}'$ sur le solénoïde S, déformé sans faire varier $\mu = \frac{I\lambda}{\partial \mathfrak{L}}$, jusqu'à ce que l'aire Λ, limitée par son axe $\mathfrak{L}$, s'annule, lors même que I, λ et $\partial\mathfrak{L}$ varieraient.

274. *En supposant, comme précédemment, que la présence du solénoïde* S, *à l'intérieur de* $\mathfrak{C}'$, *ne change pas les lignes de ce courant, et*

de plus que ce solénoïde soit continu, c'est-à-dire sa surface parcourue par un courant à deux dimensions, d'intensité superficielle (définition 450)

$$I_2 = \frac{dI}{\partial \mathfrak{L}},$$

dI étant l'intensité linéaire de la partie comprise entre les sections droites qui interceptent sur L *l'élément* $d\mathfrak{L}$; *si l'on décompose le courant* $\mathcal{C}'$ *et son volume* Π *chacun en deux parties* c *et* c', ϖ *et* ϖ' *l'une intérieure à* $\mathcal{S}$, *l'autre extérieure et accentuée; alors les actions de* $\mathcal{C}'$ *sur* $\mathcal{S}$ *et de* $\mathcal{S}$ *sur* c *sont de nature à se faire équilibre sur un système rigide.*

En effet, les actions mutuelles des deux courants fermés $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{S}$ jouissent de cette propriété; et tout revient à démontrer que $\mathcal{S}$ n'agit pas sur c'. Or son action sur un courant linéaire fictif, fermé et rigide, placé dans ϖ', est nulle, en vertu du principe **25**, combiné avec celui de l'action et de la réaction. Donc son action sur un élément du courant c', réductible à une force appliquée à son milieu (n° **25**), est nulle (n° **115**); et dès lors son action sur c' l'est aussi.

Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans le Tome II de la nouvelle édition des *Œuvres de Jacobi* ont paru, pour la première fois, des fragments, présentant le plus haut intérêt, d'un travail que l'illustre géomètre avait préparé sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe. On a souvent attribué la solution de ce problème à Poisson, qui l'a traité en effet, en le considérant comme entièrement nouveau, dans un Mémoire inséré en 1813 au XVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Mais, en réalité, l'étude de cette belle question avait déjà été faite par Lagrange; elle est développée dans la première édition de la *Mécanique analytique*, qui a paru en 1788.

Dans les Mémoires dont nous devons la publication à M. Weierstrass, Jacobi énonce et démontre, on peut le dire, un remarquable théorème d'après lequel le mouvement de rotation du corps pesant peut se ramener à une combinaison des mouvements de rotation de deux solides différents sur lesquels n'agirait aucune force accélératrice. Tout récemment M. Halphen, dans une Note insérée au Tome C des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, a donné au théorème de Jacobi une forme nouvelle et énoncé une série de résultats que nous démontrerons dans ce travail. M. Halphen n'a pas fait

connaître la méthode qu'il a suivie, et qui repose sans doute sur l'emploi des fonctions elliptiques. La démonstration que nous allons donner du théorème de Jacobi est directe et élémentaire : elle nous a conduit à quelques propositions nouvelles, relatives à la représentation cinématique du mouvement, propositions dont le développement est surtout le but de la présente étude.

I.

Nous rappellerons d'abord, en quelques mots, les formules de Lagrange et de Poisson. On rapporte le mouvement à un système d'axes fixes OX, OY, OZ, dans lequel l'axe des Z est dirigé vers le bas. Le corps est rapporté à un système d'axes Ox, Oy, Oz, pour lequel Oz coïncide avec l'axe du corps. Soient

A le moment d'inertie par rapport à Ox et Oy;
C le moment d'inertie par rapport à Oz;
p, q, r les composantes de la rotation relatives aux axes mobiles Ox, Oy, Oz;
u le cosinus variable des deux axes des z, c'est-à-dire de l'axe du corps avec la verticale;
enfin a'', b'', u les cosinus des angles de la verticale OZ avec les axes mobiles.

Les trois intégrales de Lagrange sont les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & r = n, \\ & \mathrm{A}pa'' + \mathrm{A}qb'' + \mathrm{C}ru = 2\mathrm{AL}, \\ & \mathrm{A}(p^2 + q^2) = 2\mathrm{AD}u + 2\mathrm{AH}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, n, L, H sont les constantes introduites par l'intégration ; D et $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ dépendent de la constitution du corps et le définissent, au point de vue mécanique, dans le problème qui nous occupe. Si l'on introduit les trois angles d'Euler, φ, ψ étant les angles de Ox et de OX avec l'intersection des deux plans des xy, et θ l'angle des

deux axes des z, on déduira des formules (1) les suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du^2}{dt^2} = F(u) = (2Du + 2H)(1-u^2) - 4(Bu - L)^2, \\[2mm] \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2Bu - 2L}{1-u^2}, \\[2mm] \dfrac{d\varphi}{dt} = n - 2B + \dfrac{2B - 2Lu}{1-u^2}, \end{cases}$$

où l'on a désigné par B le quotient

$$(3)\qquad B = \frac{Cn}{2A}.$$

Il ne restera plus qu'à effectuer des quadratures elliptiques pour obtenir t, φ, ψ en fonction de u, et ainsi le problème sera complètement résolu.

On déduit des équations précédentes une conséquence importante. Désignons par (P) le corps pesant, et considérons un corps auxiliaire (P′) qui serait animé, par rapport au précédent, d'une vitesse constante de rotation

$$2B - n = \frac{C-A}{A} n$$

autour de l'axe. La position de ce corps auxiliaire, dont le mouvement est lié d'une manière si simple à celui de (P), sera déterminée par les trois angles d'Euler

$$\theta,\ \psi \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \varphi + (2B - n)t.$$

On aura donc, d'après la troisième formule (2),

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2B - 2Lu}{1-u^2}.$$

Par suite, les formules qui définissent le mouvement du corps (P′) ne sont autres que les formules (1), où l'on supposerait

$$2B - n = 0 = \frac{(C-A)n}{A}.$$

Le mouvement du corps (P′) est donc celui que prendrait un corps pesant pour lequel l'ellipsoïde d'inertie du point fixe se réduirait à une sphère.

Ce mouvement jouit d'une propriété de réciprocité qu'il convient de signaler. Les formules qui donnent φ et ψ se changent l'une en l'autre, quand on remplace B, L respectivement par $-$L, $-$B. D'autre part, si, dans l'équation qui définit u, on pose

$$(4) \qquad \mathrm{H} = \mathrm{H}' - 2\mathrm{B}^2,$$

elle prend la forme

$$(5) \qquad \frac{du^2}{dt^2} = (2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H}')(1 - u^2) - 4\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{L}^2 + 8\mathrm{BL}u,$$

qui demeure invariable quand on y remplace B, L par $-$L, $-$B. Ces faits analytiques s'interprètent comme il suit :

Dans le cas, auquel on peut ramener tous les autres, où l'ellipsoïde central du point fixe est une sphère, le mouvement des axes fixes par rapport aux axes mobiles est un de ceux que prendrait le corps, si les conditions initiales étaient changées.

II.

Après avoir établi les résultats précédents, nous allons commencer la démonstration du théorème de Jacobi, sous la forme que lui a donnée M. Halphen.

L'énoncé le plus simple de cette belle proposition est le suivant :

Si l'on considère le mouvement du corps pesant (P) *de révolution fixé par le point* O, *on peut à chaque instant déterminer un système* (C) *d'axes* Ox_1, Oy_1, Oz_1 *mobiles autour du point* O, *tels que le mouvement absolu de* (C) *et le mouvement de* (C) *par rapport au corps* (P) *soient l'un et l'autre identiques au mouvement d'un corps solide fixé par le point* O, *et qui ne serait soumis à aucune force accélératrice. Le plan invariable est, dans le premier de ces mouvements, le plan horizontal; et, dans le second, c'est le plan perpendiculaire à l'axe du corps.*

Toutefois, il faut bien comprendre que, dans ces deux mouvements de (C), les moments d'inertie sont différents, et de plus qu'ils ne satisfont pas nécessairement aux relations d'inégalité qui caractérisent les moments d'inertie de tout corps réel. Ce sont des mouvements qui satisfont aux formules d'Euler, où l'on regarderait les constantes A, B, C comme pouvant prendre des valeurs quelconques. Si l'on se rappelle la représentation géométrique de Poinsot, on peut dire que l'on produirait ces mouvements en faisant rouler sur un plan, non plus un ellipsoïde d'inertie, mais un ellipsoïde quelconque ou toute autre surface à centre du second degré.

Il résulte d'une belle théorie de M. Sylvester que de tels mouvements peuvent toujours être ramenés au roulement d'un ellipsoïde d'inertie, accompagné d'une rotation constante autour de la perpendiculaire au plan invariable. Cette remarque établit le lien entre l'énoncé de Jacobi et celui de M. Halphen.

Considérons d'abord le mouvement absolu des axes (C). Si p, q, r désignent, dans ce mouvement, les composantes de la rotation relatives aux axes de (C), on aura des équations de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{a(c-b)}{bc}qr,\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b(a-c)}{ac}pr,\\ \frac{dr}{dt} &= \frac{c(b-a)}{ab}pq. \end{aligned}\right.$$

Comme elles ne contiennent que les rapports des constantes a, b, c, on peut, en multipliant ces trois constantes par un nombre convenable, écrire l'intégrale des aires sous la forme

$$(7)\qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=1,$$

et l'intégrale des forces vives sera alors

$$(8)\qquad \frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}=h.$$

Les quatre constantes a, b, c, h caractérisent le premier mouvement. On peut le produire en faisant rouler sur un plan, à une distance $\sqrt{h}$ du centre, une surface (E) dont les axes auraient pour carrés a, b, c, avec une vitesse constamment égale au produit de $\sqrt{h}$ par le rayon vecteur qui va au point de contact.

Si l'on désigne de même par p', q', r' les composantes de la rotation dans le mouvement de (C) par rapport au corps (P), on aura les équations suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \frac{a'(c'-b')}{c'b'}q'r', \\ \frac{dq'}{dt} &= \frac{b'(a'-c')}{a'c'}p'r', \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{c'(b'-a')}{a'b'}p'q', \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{p'^2}{a'} + \frac{q'^2}{b'} + \frac{r'^2}{c'} = h', \\ &\frac{p'^2}{a'^2} + \frac{q'^2}{b'^2} + \frac{r'^2}{c'^2} = 1, \end{aligned}\right.$$

relatives à ce second mouvement (E′).

Les cosinus directeurs qui définissent, par rapport aux axes (C), la verticale, c'est-à-dire la normale au plan invariable du mouvement (E), sont évidemment

$$\frac{p}{a},\ \frac{q}{b},\ \frac{r}{c}.$$

De même, les cosinus directeurs, relatifs au même système de coordonnées, de l'axe de révolution, qui est la normale au plan invariable du second mouvement (E′), sont

$$\frac{p'}{a'},\ \frac{q'}{b'},\ \frac{r'}{c'}.$$

Il suit de là que l'équation de l'ellipsoïde central du corps (P), relatif au point O, sera

$$(11)\quad A(X^2+Y^2+Z^2) - (A-C)\left(\frac{p'X}{a'} + \frac{q'Y}{b'} + \frac{r'Z}{c'}\right)^2 = 1,$$

A et C désignant les moments d'inertie déjà définis.

Cela posé, puisque p', q', r' désignent les rotations dans le mouvement (E′) de (C) par rapport au corps, $-p'$, $-q'$, $-r'$ seront les rotations dans le mouvement inverse du corps par rapport à (C); et, pour avoir la rotation absolue du corps, il faudra composer les rotations précédentes avec celles qui correspondent au mouvement absolu de (C), et qui sont p, q, r. Nous obtenons donc le résultat suivant :

A un instant quelconque, les composantes de la rotation absolue de (P), relatives aux axes (C), sont

$$p-p',\quad q-q',\quad r-r'.$$

Nous pouvons, dès à présent, indiquer une première condition à laquelle devront satisfaire les six quantités p, p', ... Comme la projection de la rotation sur l'axe de révolution doit être constante dans le problème qui nous occupe, nous aurons, en nous rappelant que cette constante a été désignée par n, et que $\frac{p'}{a'}$, $\frac{q'}{b'}$, $\frac{r'}{c'}$ sont les cosinus directeurs de l'axe de révolution,

$$\frac{p'}{a'}(p-p')+\frac{q'}{b'}(q-q')+\frac{r'}{c'}(r-r')=n$$

ou, plus simplement,

$$\frac{pp'}{a'}+\frac{qq'}{b'}+\frac{rr'}{c'}=n+h'. \tag{12}$$

Pour établir les autres conditions, nous rappellerons la proposition suivante : Si

$$\varphi(X, Y, Z)=1$$

est l'équation de l'ellipsoïde central, rapporté à des axes quelconques ayant pour origine le point fixe d'un corps mobile, et, si p, q, r sont les composantes de la rotation relatives aux mêmes axes, la force vive $2T$ est égale à

$$2T=\varphi(p, q, r),$$

et les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement

sont

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial q},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Or nous avons ici l'équation (11) de l'ellipsoïde central, et aussi les composantes de la rotation. Nous pouvons, par suite, appliquer la proposition précédente, et nous trouvons d'abord, pour la force vive du corps,

$$(13)\quad 2T = A[(p-p')^2 + (q-q')^2 + (r-r')^2] - (A-C)n^2,$$

en tenant compte toutefois de l'équation (12).

Quant aux projections de l'axe du couple des quantités de mouvement, elles sont

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_x = A(p-p') - (A-C)n\dfrac{p'}{a'}, \\ \mathfrak{L}_y = A(q-q') - (A-C)n\dfrac{q'}{b'}, \\ \mathfrak{L}_z = A(r-r') - (A-C)n\dfrac{r'}{c'}. \end{cases}$$

Si nous conservons les notations de l'article I, il faut exprimer que la projection de l'axe de ce couple sur la verticale, dont les cosinus directeurs sont $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{b}$, $\frac{r}{c}$, est constante et égale à 2AL. On aura ainsi l'équation

$$\frac{p}{a}\mathfrak{L}_x + \frac{q}{b}\mathfrak{L}_y + \frac{r}{c}\mathfrak{L}_z = 2AL$$

ou, en faisant les réductions,

$$(15)\quad \frac{pp'}{a} + \frac{qq'}{b} + \frac{rr'}{c} + (n-2B)\left(\frac{pp'}{aa'} + \frac{qq'}{bb'} + \frac{rr'}{cc'}\right) = h - 2L,$$

B étant la constante définie par l'équation (3).

Il nous reste enfin à écrire l'équation des forces vives que l'on peut mettre sous la forme

$$\omega^2 = 2Du + 2H + n^2,$$

ω désignant le carré de la rotation totale. On a ici

$$\omega^2 = (p - p')^2 + (q - q')^2 + (r - r')^2$$

et

$$u = \cos\theta = \frac{pp'}{aa'} + \frac{qq'}{bb'} + \frac{rr'}{cc'}. \tag{16}$$

On aura donc, pour l'équation des forces vives, la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} &(p - p')^2 + (q - q')^2 + (r - r')^2 \\ &\quad = 2\mathrm{D}\left(\frac{pp'}{aa'} + \frac{qq'}{bb'} + \frac{rr'}{cc'}\right) + 2\mathrm{H} + n^2. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Pour démontrer complètement le théorème de Jacobi, il suffira de montrer que l'on peut disposer des fonctions p, q, r, p', q', r' de manière à satisfaire aux équations (12), (15), (17) qui représentent les trois intégrales premières du mouvement.

III.

Quelques considérations, que nous omettons, relatives aux infinis des fonctions, montrent immédiatement que l'on ne pourra satisfaire à la relation (17) qu'en posant

$$p' = \alpha' p, \quad q' = \beta' q, \quad r' = \gamma' r, \tag{18}$$

α', β', γ' désignant des constantes. On peut remplacer les équations (9) par l'une d'entre elles, jointe aux équations (10); en sorte que les équations qui devront être vérifiées prendront la forme suivante

$$\frac{a(b-c)}{bc}\,\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\beta'\gamma'}{b'c'}(b' - c'); \tag{19}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\alpha'^2 p^2}{a'} + \frac{\beta'^2 q^2}{b'} + \frac{\gamma'^2 r^2}{c'} = h', \\ &\frac{\alpha'^2 p^2}{a'^2} + \frac{\beta'^2 q^2}{b'^2} + \frac{\gamma'^2 r^2}{c'^2} = 1; \end{aligned} \right. \tag{20}$$

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\alpha' p^2}{a'} + \frac{\beta' q^2}{b'} + \frac{\gamma' r^2}{c'} = n + h',\\
&\frac{\alpha' p^2}{a}\left(1 + \frac{n - 2B}{a'}\right) + \frac{\beta' q^2}{b}\left(1 + \frac{n - 2B}{b'}\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{\gamma' r^2}{c}\left(1 + \frac{n - 2B}{c'}\right) = h - 2L,\\
&p^2(1-\alpha')^2 + q^2(1-\beta')^2 + r^2(1-\gamma')^2\\
&\qquad\qquad - 2D\left(\frac{\alpha' p^2}{aa'} + \frac{\beta' q^2}{bb'} + \frac{\gamma' r^2}{cc'}\right) = 2H + n^2,
\end{aligned}\right.
$$

et, comme p, q, r ne peuvent être constantes, il faudra que les cinq dernières soient toutes des combinaisons linéaires des équations (7) et (8), que nous écrirons sous la forme

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1,\\
&\frac{p^2(a-h)}{a^2} + \frac{q^2(b-h)}{b^2} + \frac{r^2(c-h)}{c^2} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Nous sommes ainsi conduits aux systèmes suivants :

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\alpha'^2}{a'} &= \frac{h' + \lambda(h-a)}{a^2},\\
\frac{\beta'^2}{b'} &= \frac{h' + \lambda(h-b)}{b^2},\\
\frac{\gamma'^2}{c'} &= \frac{h' + \lambda(h-c)}{c^2};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\alpha'^2}{a'^2} &= \frac{1 + \mu(h-a)}{a^2},\\
\frac{\beta'^2}{b'^2} &= \frac{1 + \mu(h-b)}{b^2},\\
\frac{\gamma'^2}{c'^2} &= \frac{1 + \mu(h-c)}{c^2};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\alpha'}{a'} &= \frac{n + h' + \nu(h-a)}{a^2},\\
\frac{\beta'}{b'} &= \frac{n + h' + \nu(h-b)}{b^2},\\
\frac{\gamma'}{c'} &= \frac{n + h' + \nu(h-c)}{c^2};
\end{aligned}\right.
$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha'}{a}\left(1+\frac{n-2B}{a'}\right)=\frac{h-2L+\rho(h-a)}{a^2},\\ &\frac{\beta'}{b}\left(1+\frac{n-2B}{b'}\right)=\frac{h-2L+\rho(h-b)}{b^2},\\ &\frac{\gamma'}{c}\left(1+\frac{n-2B}{c'}\right)=\frac{h-2L+\rho(h-c)}{c^2};\end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-\alpha')^2-\frac{2D\alpha'}{aa'}=\frac{2H+n^2+\sigma(h-a)}{a^2},\\ &(1-\beta')^2-\frac{2D\beta'}{bb'}=\frac{2H+n^2+\sigma(h-b)}{b^2},\\ &(1-\gamma')^2-\frac{2D\gamma'}{cc'}=\frac{2H+n^2+\sigma(h-c)}{c^2}.\end{aligned}\right.$$

On a ainsi, en tenant compte de l'équation (19), seize équations qui contiennent seize inconnues, a, b, c, h; a', b', c', h'; α', β', γ'; $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$.

Nous allons montrer qu'on peut déterminer des valeurs réelles pour toutes ces inconnues.

En égalant d'abord les valeurs de $\frac{\alpha'}{a'}, \frac{\beta'}{b'}, \frac{\gamma'}{c'}$ données par les équations (24) et (25), on obtient trois relations; elles expriment que a, b, c sont les trois racines de l'équation

$$(28)\qquad [n+h'+\nu(h-x)]^2-x^2[1+\mu(h-x)]=0.$$

On doit donc avoir l'identité

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &[n+h'+\nu(h-x)]^2\\ &\qquad -x^2[1+\mu(h-x)]=\mu(x-a)(x-b)(x-c),\end{aligned}\right.$$

qui se résout dans les trois équations suivantes :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &(n+h'+\nu h)^2=-\mu R,\\ &-2\nu(n+h'+\nu h)=\mu Q,\\ &\nu^2-1-\mu h=-\mu P,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(31)\qquad a+b+c=P,\quad ab+ac+bc=Q,\quad abc=R.$$

La résolution du système (30) nous donne les résultats suivants : Soit Ω la quantité définie par la formule

$$(32)\qquad \Omega^2 = Q^2 - 4R(P - h).$$

On trouve

$$(33)\qquad \begin{cases} n + h' = \dfrac{2R - Qh}{\Omega}, & \mu = -\dfrac{4R}{\Omega^2}, \\ \nu = \dfrac{Q}{\Omega}, & n + h' + \nu h = \dfrac{2R}{\Omega}. \end{cases}$$

Si nous divisons maintenant chaque équation du système (23) par l'équation correspondante du système (24), puis par l'équation correspondante du système (25), nous obtiendrons les formules

$$(34)\qquad \begin{cases} a' = \dfrac{h' + \lambda(h - a)}{1 + \mu(h - a)}, \\ b' = \dfrac{h' + \lambda(h - b)}{1 + \mu(h - b)}, \\ c' = \dfrac{h' + \lambda(h - c)}{1 + \mu(h - c)}; \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{h' + \lambda(h - a)}{n + h' + \nu(h - a)}, \\ \beta' = \dfrac{h' + \lambda(h - b)}{n + h' + \nu(h - b)}, \\ \gamma' = \dfrac{h' + \lambda(h - c)}{n + h' + \nu(h - c)}, \end{cases}$$

qui, jointes aux relations (33), pourront remplacer les systèmes (23), (24), (25).

En portant ces valeurs de α', a', ... dans la formule (19), et en tenant compte de ce que a est racine de l'équation (28), on remplacera l'équation (19) par la suivante

$$(36)\qquad \begin{cases} R(\mu h' - \lambda) \\ \qquad = (n + h' + \nu h - \nu a)(n + h' + \nu h - \nu b)(n + h' + \nu h - \nu c), \end{cases}$$

que l'on peut simplifier de différentes manières.

Par exemple, si dans l'identité (29) on donne à x la valeur $\frac{n+h'+\nu h}{\nu}$, on est conduit à l'égalité

$$-(n+h'+\nu h)^2[\nu-\mu(n+h')]$$
$$=\mu(n+h'+\nu h-\nu a)(n+h'+\nu h-\nu b)(n+h'+\nu h-\nu c).$$

En remplaçant le second membre de l'équation (36) par sa valeur déduite de l'égalité précédente, et tenant compte des formules (30), on trouve

$$(37)\qquad \mu h'-\lambda=\nu-\mu(n+h').$$

On pourrait encore écrire l'équation (36) en y remplaçant directement $n+h'$ et ν par leurs valeurs déduites des formules (30). Elle prend alors la forme

$$(38)\qquad \mu h'-\lambda=-\frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega^3},$$

où α, β, γ désignent des quantités qui joueront un rôle important dans les formules définitives, et qui s'expriment en fonction de a, b, c de la manière suivante :

$$(39)\qquad \begin{cases} \alpha=a(b+c)-bc=\mathrm{Q}-\dfrac{2\mathrm{R}}{a}, \\ \beta=b(a+c)-ac=\mathrm{Q}-\dfrac{2\mathrm{R}}{b}, \\ \gamma=c(a+b)-ab=\mathrm{Q}-\dfrac{2\mathrm{R}}{c}. \end{cases}$$

Signalons, dès à présent, les identités

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha^2=\mathrm{Q}^2-4\mathrm{R}(\mathrm{P}-a), \\ \beta^2=\mathrm{Q}^2-4\mathrm{R}(\mathrm{P}-b), \\ \gamma^2=\mathrm{Q}^2-4\mathrm{R}(\mathrm{P}-c); \end{cases}$$

$$(41)\qquad \begin{cases} \alpha\beta\gamma=4\mathrm{PQR}-\mathrm{Q}^3-8\mathrm{R}^2, \\ \Sigma\alpha\beta=4\mathrm{RP}-\mathrm{Q}^2, \\ \Sigma\alpha=\mathrm{Q}, \end{cases}$$

auxquelles elles donnent lieu.

Il nous reste à examiner les systèmes (26) et (27).

Si l'on remplace dans la première équation (26) α' et a' par leurs valeurs déduites des formules (34), (35), il vient

$$h' + \lambda(h-a) + (n-2\mathrm{B})[1+\mu(h-a)]$$
$$= \frac{h - 2\mathrm{L} + \rho(h-a)}{a}(n + h' + \nu h - \nu a).$$

Cette équation est du second degré en a, et, comme elle doit être vérifiée quand on y remplace a par b et par c, elle devra avoir lieu pour toute valeur de a.

Cela donne les trois relations

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} h - 2\mathrm{L} + \rho h = 0, \\ \lambda + \mu(n-2\mathrm{B}) + \nu\rho = 0, \\ h' + n - 2\mathrm{B} + \rho(n+h') = 0. \end{array}\right.$$

En les associant à la formule (37), on trouve

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \rho = 1, & \mathrm{B} = n + h', \\ \mathrm{L} = h, & \lambda = -\dfrac{4\mathrm{B}h'}{\Omega^2} + \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\Omega^3}. \end{array}\right.$$

Ces relations, jointes aux formules (33), (34), (35), nous font connaître λ, μ, ν, ρ, a', b', c', α', β', γ' en fonction de a, b, c, h qui, elles-mêmes, satisfont aux deux équations

$$h = \mathrm{L}, \quad \mathrm{B} = \frac{2\mathrm{R} - \mathrm{Q}h}{\Omega}.$$

Il reste donc seulement deux arbitraires, dont il faudra disposer de manière à vérifier les trois équations (27), qui contiennent d'ailleurs une inconnue nouvelle σ.

Si nous remplaçons $n + h'$ et ν par leurs valeurs dans les formules (25), elles nous donnent

$$(43)\qquad \frac{\alpha'}{a'} = -\frac{\alpha}{a\Omega} = \frac{2\mathrm{R}}{a^2\Omega} - \frac{\mathrm{Q}}{a\Omega},$$

et les équations analogues en β', γ'. Remarquons également les identités

$$(44) \quad \begin{cases} \alpha' + 1 + (n - 2B)\dfrac{\alpha'}{a'} = 0, \\ \beta' + 1 + (n - 2B)\dfrac{\beta'}{b'} = 0, \\ \gamma' + 1 + (n - 2B)\dfrac{\gamma'}{c'} = 0; \end{cases}$$

d'où l'on peut, dès à présent, déduire une importante conséquence.

Si, dans les formules (14), on remplace Cn par $2B$ et p', q', r' par leurs valeurs $\alpha' p$, $\beta' q$, $\gamma' r$, les relations précédentes nous donnent

$$(45) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_x = 2Ap, \\ \mathfrak{L}_y = 2Aq, \\ \mathfrak{L}_z = 2Ar. \end{cases}$$

Par conséquent, l'axe du couple des quantités de mouvement du corps a, à chaque instant, la même direction que l'axe instantané de la rotation absolue du système mobile (C), et il est proportionnel à cette rotation.

IV.

Il nous reste à considérer le système (27). En tenant compte des formules (44), la première équation de ce système peut s'écrire

$$\left[2 + (n - 2B)\frac{\alpha'}{a'}\right]^2 - \frac{2D\alpha'}{aa'} = \frac{2H + n^2 + \sigma(h - a)}{a^2}.$$

Si l'on remplace $\dfrac{\alpha'}{a'}$ par sa valeur déduite de la formule (43), il viendra

$$\left[2 + \frac{n - 2B}{\Omega}\left(\frac{2R}{a^2} - \frac{Q}{a}\right)\right]^2 - \frac{2D}{\Omega}\left(\frac{2R}{a^3} - \frac{Q}{a^2}\right) = \frac{2H + n^2 + \sigma(h - a)}{a^2}.$$

Ordonnons suivant les puissances de $\dfrac{1}{a}$, et éliminons $\dfrac{1}{a^4}$, $\dfrac{1}{a^3}$ au moyen

de l'équation

$$a^3 - Pa^2 + Qa - R = 0,$$

à laquelle satisfait a. Il viendra une équation du second degré en $\frac{1}{a}$, qui sera satisfaite quand on y remplacera a par b et c. Il faudra donc que les coefficients des différentes puissances de a soient nuls. On est ainsi conduit, après quelques réductions, aux formules

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &D = \Omega,\\ &4P + \sigma = \frac{4Q(n - 2B)}{D} - \frac{4R(n - 2B)^2}{D^2},\\ &2R - Qh = BD. \end{aligned}\right.$$

Tout se réduit donc à déterminer a, b, c, h par les quatre équations

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega = D, && h = L,\\ &2R - Qh = BD, && 2Ph - Q = H + 2B^2. \end{aligned}\right.$$

Il suffit de remplacer Ω par son expression en fonction de P, Q, R, h, et l'on trouvera les équations

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &Q^2 - 4R(P - L) = D^2,\\ &2R - QL = BD,\\ &2PL - Q = H + 2B^2, \end{aligned}\right.$$

qui détermineront P, Q, R. En les résolvant, on obtient les expressions suivantes de ces inconnues

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{(LD + BH)D + 2BD(B^2 - L^2)}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH},\\ 2R &= \frac{D^2(L^2 - B^2)}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH},\\ 2P &= \frac{D^2 - 2BDL + 2L^2(H + 2B^2) - (H + 2B^2)^2}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH}, \end{aligned}\right.$$

et, par suite, on peut former l'équation du troisième degré qui fait

connaître a, b, c. Mais il vaut mieux employer une autre méthode qui servira de vérification à nos calculs et aura l'avantage de mettre en évidence la réalité des racines de l'équation.

Nous avons déjà écrit, à l'article I, l'équation différentielle qui détermine le cosinus u de l'angle de la verticale et de l'axe du corps. Nous pouvons ici former cette équation d'une autre manière.

L'équation (16) nous donne, en remplaçant p', q', r' par leurs valeurs,

$$(50) \qquad u = \frac{\alpha' p^2}{aa'} + \frac{\beta' q^2}{bb'} + \frac{\gamma' r^2}{cc'}.$$

En différentiant cette équation, nous trouverons

$$(51) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{abc\Omega} pqr.$$

D'autre part, on peut exprimer p, q, r en fonction de u, au moyen de l'équation (50), jointe aux intégrales des aires et des forces vives, ce qui donne

$$(52) \quad \frac{p^2}{a^2} = \frac{2ah - \alpha + \Omega u}{2(a-b)(a-c)}, \quad \frac{q^2}{b^2} = \frac{2bh - \beta + \Omega u}{2(b-a)(b-c)}, \quad \frac{r^2}{c^2} = \frac{2ch - \gamma + \Omega u}{2(c-a)(c-b)}.$$

En portant ces valeurs de p, q, r dans l'équation (51), on trouve

$$(53) \quad \Omega^2 \frac{du^2}{dt^2} = 2(\alpha - 2ah - \Omega u)(\beta - 2bh - \Omega u)(\gamma - 2ch - \Omega u).$$

Cette valeur de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ est identique à celle qui a été donnée à l'article I, comme il est aisé de le vérifier. Nous pouvons en conclure que les racines de l'équation, entièrement connue,

$$F(u) = 2(1-u^2)(Du + H) - 4(Bu - L)^2 = 0$$

ont pour expressions en fonction de a, b, c

$$\frac{\alpha - 2ah}{D}, \quad \frac{\beta - 2bh}{D}, \quad \frac{\gamma - 2ch}{D}.$$

Comme on a, en vertu de la définition de α,

$$\alpha - 2ah = 2h^2 - 2Ph + Q - 2\frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{h-a},$$

on voit que l'on obtiendra l'équation aux carrés des axes a, b, c en effectuant dans l'équation

$$F(u) = 0$$

la substitution linéaire définie par la formule

$$Du = 2L^2 - PL + Q - \frac{2f(L)}{L-a},$$

$f(x)$ désignant le polynôme

$$f(x) = x^3 - Px^2 + Qx - R.$$

Or les coefficients de cette substitution linéaire peuvent se déduire des formules (48). Elles donnent pour $f(L)$ la valeur suivante

(54) $$2f(L) = 2L(L^2 - B^2) - BD - LH,$$

et la substitution linéaire prend la forme

(55) $$Du + H = 2L^2 - 2B^2 - \frac{2f(L)}{L-a},$$

où tout est connu. C'est l'un des résultats donnés par M. Halphen, et, comme l'équation en u a ses racines réelles pour tous les mouvements réels, il en sera de même de l'équation aux carrés des axes.

Le théorème de Jacobi est donc complètement démontré.

On peut demander aussi l'équation du troisième degré qui fait connaître les quantités a', b', c' relatives au second mouvement (E').

On a d'abord

$$h' = B - n,$$

et les formules (34) nous donnent

(56) $$\frac{1}{L-a} = \frac{4R}{\Omega^2} - \frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega^3}\frac{1}{h'-a'}.$$

En portant la valeur de $L - a$ dans la formule (55) et remarquant qu'on a

$$2f(L)\alpha\beta\gamma = - D^3(DL + BH),$$

nous trouvons

$$Du + H = - \frac{DL + BH}{h' - a'}. \tag{57}$$

Telle est la substitution linéaire qui, effectuée dans l'équation en u, donnera l'équation aux carrés des axes a', b', c'. On peut également calculer la valeur de α' par la formule (35), et l'on trouve

$$\alpha' = -1 + \frac{2B - n}{D} \frac{Du + H}{Bu - L}, \tag{58}$$

$$D\frac{\alpha'}{a'} = \frac{Du + H}{Bu - L} = - \frac{\alpha}{a}. \tag{59}$$

V.

Les constantes a, b, c, h, a', b', c', h', α', β', γ', relatives aux deux mouvements (E), (E'), doivent être liées évidemment par six relations. On peut se demander quelles doivent être ces relations. On les déduit aisément des formules précédentes. Les équations (34) nous donnent

$$h' - a' = \frac{(h\mu - \lambda)(h - a)}{1 + \mu(h - a)}$$

ou, en remplaçant $h'\mu - \lambda$ et μ par leurs valeurs en fonction de a, b, c,

$$h' - a' = - \frac{\beta\gamma}{\alpha\Omega}(h - a).$$

On a donc le système des relations

$$\frac{\alpha^2(h' - a')}{h - a} = \frac{\beta^2(h' - b')}{h - b} = \frac{\gamma^2(h' - c')}{h - c} = - \frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega}, \tag{60}$$

auxquelles il faut joindre les formules (59), écrites comme il suit :

$$\alpha' = - \frac{\alpha a'}{a\Omega}, \quad \beta' = - \frac{\beta b'}{b\Omega}, \quad \gamma' = \frac{-\gamma c'}{c\Omega}. \tag{61}$$

Si l'on ne considère que les mouvements d'un même corps, il faudra joindre deux équations, elles expriment en fonction de a, b, c, h les constantes qui caractérisent le corps D et $\frac{B}{n}$. Ce sont les suivantes :

$$(62)\quad \begin{cases} \Omega = D, \\ h' = \dfrac{n-B}{DB}(Qh - 2R), \end{cases}$$

qui, jointes aux formules (60), ne laisseront plus subsister que trois arbitraires indépendantes a, b, c

Il nous reste maintenant à signaler quelques conséquences géométriques du théorème de Jacobi, qui conduisent à une représentation géométrique très simple du mouvement. Nous avons vu à l'article I, et il serait aisé de déduire ce résultat des formules précédentes, que le mouvement le plus général du corps pesant (P) se ramène par une transformation très simple à celui dans lequel on a

$$n = 2B.$$

Alors on a, d'après les formules (44),

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = -1$$

et, par conséquent,

$$p' = -p, \quad q' = -q, \quad r' = -r.$$

On voit donc que, dans les deux mouvements (E), (E'), la polhodie est la même, et, de plus, le pôle instantané occupe, à chaque instant, la même position sur cette courbe dans les deux mouvements Désignons par (Π) cette courbe et par (K) le cône du second degré décrit par l'axe instantané, qui a pour base cette polhodie. Le mouvement absolu du système (C) s'obtient en faisant rouler le cône (K) sur un certain cône fixe (Γ) ayant pour base une herpolhodie (H). Le mouvement de (C) relatif au corps (P) s'obtient en faisant rouler le cône du second degré (K) sur un autre cône (Γ') invariablement lié au corps et ayant pour base une herpolhodie (H'), et, de plus, *la génératrice de contact du cône* (K) *est la même à chaque instant dans les deux mouvements.*

Cela veut dire que les deux cônes (Γ) et (Γ') roulent l'un sur l'autre, et, par conséquent, le mouvement du corps (P) sera représenté par le roulement du cône (Γ') sur le cône (Γ); et la vitesse de rotation sera évidemment double du rayon vecteur qui va au point de contact des deux herpolhodies (H) et (H') Ces deux courbes, qui sont les bases de ces deux cônes, roulent aussi l'une sur l'autre.

En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été donnés à l'article I, nous obtenons le théorème suivant :

Étant donné le corps pesant (P) *de révolution, soumis à l'action de la pesanteur dans des conditions initiales quelconques, considérons un corps auxiliaire* (P') *qui soit animé par rapport au précédent d'une vitesse de rotation constante*

$$\frac{C-A}{A}n$$

autour de l'axe de révolution; C, A, *n étant les constantes définies précédemment, le mouvement du corps* (P') *pourra se représenter par le roulement d'un cône* (Γ'), *invariablement lié à ce corps et ayant pour base une herpolhodie* (H'), *sur un cône fixe* (Γ), *ayant pour base une autre herpolhodie* (H). *Les deux herpolhodies rouleront l'une sur l'autre, et la rotation du corps* (P') *sera, à chaque instant, double du rayon vecteur qui va du point fixe à leur point de contact.*

VI.

La proposition précédente donne la représentation la plus simple du mouvement. On peut cependant désirer une représentation directe du mouvement du corps (P); les relations données plus haut permettent, nous allons le voir, d'obtenir cette représentation.

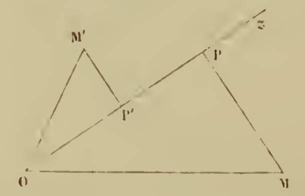
D'abord les formules (45) nous montrent que l'axe du couple des quantités de mouvement a la direction de la rotation instantanée dans le mouvement (E), et qu'il est égal en grandeur à cette rotation, multipliée par 2A. Donc :

L'extrémité de l'axe du couple des quantités de mouvement parcourt

une herpolhodie, située dans un plan horizontal, et cela de la même manière que le pôle instantané, qui serait relatif à cette courbe.

La tangente à cette courbe étant, comme on sait, perpendiculaire au plan du couple qui naît de la translation de la force au point fixe, sera donc normale à chaque instant au plan passant par l'axe de révolution du corps et par la verticale. Si l'herpolhodie n'a pas de point d'inflexion, ce plan tournera toujours dans le même sens; sinon, il aura un mouvement, tantôt direct et tantôt rétrograde.

Prenons maintenant l'axe de rotation OM du corps, dont la projection OP sur l'axe de révolution Oz est constante et égale à n, et soit



OM' l'axe de la rotation dans le mouvement (E') dont la projection sur Oz est également constante et égale à h'. Nous savons que le point M' décrit une herpolhodie dans un plan perpendiculaire à Oz. Je vais démontrer qu'il en est de même du point M.

Les projections de MP sur les axes (C) sont

$$p - p' - n\frac{p'}{a'},\quad q - q' - n\frac{q'}{b'},\quad r - r' - n\frac{r'}{c'};$$

celles de M'P' sont

$$p'\left(1 - \frac{h'}{a'}\right),\quad q'\left(1 - \frac{h'}{b'}\right),\quad r'\left(1 - \frac{h'}{c'}\right).$$

En vertu des formules (44), ces projections sont proportionnelles, et leur rapport est -2. Donc les points M, M' décrivent des courbes homothétiques, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

L'extrémité de l'axe de rotation décrit dans le corps et sur un plan perpendiculaire à l'axe une herpolhodie; il parcourt d'ailleurs cette courbe, d'après la même loi que le pôle instantané dans le mouvement d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force accélératrice.

Cette proposition nous fait connaître le cône de la rotation instantanée dans le corps. Celle que nous allons démontrer permet de définir le lieu décrit par cet axe dans l'espace.

Appelons, pour un instant, ξ, η, ζ les composantes de la rotation relatives aux axes fixes OX, OY, OZ. L'équation des forces vives nous donne

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2Du + 2H + n^2. \tag{63}$$

La projection ζ sur la verticale a évidemment pour expression

$$\zeta = (p - p')\frac{p}{a} + (q - q')\frac{p}{b} + (r - r')\frac{r}{c}$$

ou, d'après l'équation (15),

$$\zeta = 2L - (2B - n)u. \tag{64}$$

Si nous éliminons u entre les relations (63), (64), nous obtenons l'équation d'une sphère ayant son centre sur la verticale. Donc :

Le mouvement le plus général du corps (P) *peut se représenter par le roulement d'un cône ayant pour base une herpolhodie, sur une sphère ayant son centre sur la verticale.*

La courbe décrite par le pôle instantané sur cette sphère pourrait être définie par la condition que son arc et le rayon vecteur qui va au point fixe soient liés par la même relation que dans l'herpolhodie attachée au corps.

VII.

Les propositions relatives à la représentation géométrique du mouvement peuvent d'ailleurs être démontrées directement à l'aide des formules données à l'article I, qui font connaître les trois angles d'Euler, θ, φ, ψ. Reprenons les notations de cet article et désignons main-

tenant par p, q, r les composantes de la rotation relatives aux axes du corps. Nous aurons

$$(65)\qquad \begin{cases} p^2+q^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H}, \\ r = n; \end{cases}$$

$$(66)\qquad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

Considérons la courbe décrite dans le corps par l'extrémité de l'axe instantané. La seconde équation (5) nous montre que cette courbe est située dans un plan perpendiculaire à l'axe. Si on la rapporte à des coordonnées polaires dont le pôle soit le point où ce plan rencontre l'axe, on aura, en désignant par ρ et ω les deux coordonnées d'un point de la courbe,

$$(67)\qquad \begin{cases} \rho^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H}, \\ \omega = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{q}{p} = -\varphi - \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\sin\theta\, d\psi}{d\theta}. \end{cases}$$

En différentiant la seconde de ces équations, on trouve

$$(\mathrm{D}u+\mathrm{H})\frac{d\omega}{dt} = (\mathrm{B}-n)(\mathrm{D}u+\mathrm{H}) + \mathrm{BH} + \mathrm{DL}$$

ou encore

$$(68)\qquad \rho^2 \frac{d\omega}{dt} = (\mathrm{B}-n)\rho^2 + 2\mathrm{BH} + 2\mathrm{DL}.$$

Cette formule, jointe à celle qui donne ρ^2, permet de calculer la vitesse totale du pôle, pour laquelle on trouve l'expression

$$(69)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{D}^2(1-u^2) + 2n(n-2\mathrm{B})(\mathrm{D}u+\mathrm{H}) \\ \qquad\qquad - 4(n-2\mathrm{B})(\mathrm{BH}+\mathrm{DL}). \end{cases}$$

La vitesse aréolaire $\rho^2 \dfrac{d\omega}{dt}$ est une fonction du premier degré de ρ^2;

la vitesse totale, une fonction du second degré de u et par conséquent de ρ^2 dans laquelle le coefficient de ρ^4 est négatif. *Ces deux propriétés caractérisent l'herpolhodie considérée comme trajectoire du pôle instantané dans le mouvement d'un corps qui n'est soumis à aucune force.* Nous retrouvons ainsi une des propositions précédentes.

Étudions maintenant la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace. Ses coordonnées relatives aux axes fixes ont été désignées par ξ, η, ζ. On obtient aisément leurs expressions en fonction des angles d'Euler

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \sin\psi\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} - \cos\psi\,\frac{d\theta}{dt},\\ \eta &= \cos\psi\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} + \sin\psi\,\frac{d\theta}{dt},\\ \zeta &= \qquad\qquad -\frac{d\psi}{dt} + \cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

On a d'abord

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = p^2+q^2+r^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2,\\ &\zeta = 2\mathrm{L} - (2\mathrm{B}-n)u. \end{aligned}\right.$$

Et en éliminant u on retrouve l'équation de la sphère ayant son centre sur la verticale. Pour définir complètement la route suivie par le pôle instantané, il suffira d'étudier sa projection sur le plan horizontal. Nous la rapporterons à des coordonnées polaires, l'origine étant choisie pour pôle. Si ρ' et ω' désignent ces coordonnées, on aura évidemment

$$\rho'^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$\omega' = \operatorname{arc\,tang}\frac{\eta}{\xi}.$$

Désignons par Δ et P les polynômes suivants

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2 - [2\mathrm{L} - (2\mathrm{B}-n)u]^2,\\ &\mathrm{P} = (2\mathrm{B}-n)u^2 - 2\mathrm{L}u + n; \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(73)\qquad \rho'^2 = \Delta,$$

et les deux premières formules (70) donneront

$$(74) \qquad \omega' = -\psi - \text{arc tang}\frac{\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}\text{}= -\psi + \text{arc tang}\frac{\mathrm{P}}{\left(\frac{du}{dt}\right)}.$$

La différentiation de cette formule est très aisée, si l'on fait usage de l'identité

$$(75) \qquad \frac{du^2}{dt^2} + \mathrm{P}^2 = (1-u^2)\Delta,$$

à laquelle on est conduit en vérifiant l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 = \sin\theta\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2};$$

on trouve ainsi

$$(76) \qquad \frac{d\omega'}{dt} = \mathrm{L} + \frac{\mathrm{P}'\Delta - \mathrm{P}\Delta'}{2\Delta},$$

P' et Δ' désignant les dérivées de P et de Δ par rapport à u.

Dans le cas où l'on a $n = 2\mathrm{B}$, on obtient encore une herpolhodie.

Nous terminerons ce sujet en donnant une définition directe et purement géométrique de cette courbe.

Considérons tous les mouvements pour lesquels les constantes B, D, H, L ont la même valeur. Si les corps correspondants ont au début le même axe de révolution, il résulte des formules (2) que cet axe leur demeurera commun dans tout le mouvement, et le mouvement de chacun d'eux par rapport à l'un quelconque des autres se réduira à une rotation constante autour de l'axe. Étudions les courbes décrites dans l'espace par les pôles instantanés des rotations relatives à ces divers mouvements. Il faudra pour cela faire varier n dans les formules (70) et (71).

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les valeurs de ξ, η, ζ relatives à l'hypothèse $n = 2\mathrm{B}$. Dans ce cas la courbe décrite par le pôle est, nous le savons, une herpolhodie (H) qui, d'après la formule (71), sera située dans le plan

$$\zeta = 2\mathrm{L}.$$

Comme elle demeure en contact avec une autre herpolhodie dont le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution, *sa tangente sera nécessairement perpendiculaire à cet axe*.

Prenons maintenant une valeur quelconque de n. Les formules (70) nous donnent

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + (n - 2B)\sin\psi\sin\theta,\\ \eta &= \eta_1 + (n - 2B)\cos\psi\sin\theta,\\ \zeta &= \zeta_1 + (n - 2B)\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Nous savons que, pour chaque valeur de n, cette courbe se trouve sur la sphère définie par les formules (71) et dont l'équation est

$$(78)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2H + n^2 + \frac{2D(2L - \zeta)}{2B - n}.$$

D'autre part, les relations (77) nous montrent, ce qui est évident par la Géométrie, qu'à un instant quelconque tous les pôles correspondants à des valeurs différentes de n se trouvent placés à des distances invariables les unes des autres, sur une même droite qui est parallèle à l'axe commun de révolution et par conséquent normale à l'herpolhodie (H). Or le mouvement de cette droite est défini par la condition que deux de ses points demeurent sur des sphères, qu'un autre point demeure dans le plan de l'herpolhodie (H) et enfin qu'elle soit normale à la trajectoire de l'un quelconque de ses points, par exemple de celui qui décrit un plan. On s'assure aisément qu'il n'y a, entre les deux sphères, le plan et les segments de la droite invariable, d'autre relation que la suivante : le plan est perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères. De là cette curieuse proposition :

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis, les deux premiers à demeurer sur deux sphères différentes, le troisième à rester dans un plan perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères, si de plus la droite se déplace de manière à demeurer normale à la trajectoire de l'un de ses points, ce qui définit complètement son mouvement à partir d'une position donnée, le point de la droite assujetti à rester dans le plan décrira une herpolhodie, tous les autres décriront les courbes sphériques qui sont

les routes du pôle dans l'espace, pour le mouvement d'un corps pesant de révolution.

Telle est la définition directe et purement géométrique que nous voulions obtenir de la route décrite par le pôle dans le problème de Lagrange, aussi bien que de l'herpolhodie de Poinsot. Nous signalerons, en terminant, le théorème suivant de Cinématique, qui se rattache directement à la proposition précédente et dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis à demeurer sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les autres points de la droite décrivent des sphères; et, en écartant un cas exceptionnel où la droite fait un angle constant avec la ligne des centres, il y a toujours un point de la droite qui décrit un plan.

Si la droite, dans son mouvement, entraîne des plans qui lui soient perpendiculaires, ces plans envelopperont des sphères concentriques dont le centre commun sera sur la ligne des centres des sphères décrites par les différents points.

Remarquons que cette proposition donne le moyen de décrire un plan à l'aide d'un système articulé comprenant quatre tiges seulement [1].

---

[1] On pourra consulter, relativement à ces propositions de Cinématique et au sujet traité dans ce travail, plusieurs articles publiés dans les Tomes C et CI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — Premier Mémoire : *Généralités et groupes quadratiques ;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

On sait que plusieurs géomètres, surtout M. Camille Jordan, ont construit les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe linéaire homogène à deux et à trois variables.

Les substitutions linéaires ne sont qu'un cas particulier des substitutions birationnelles. On peut, par conséquent, se proposer d'étendre les recherches précédentes aux substitutions birationnelles générales.

S'il y a deux variables, les substitutions birationnelles homogènes ne peuvent être que linéaires; s'il y a trois variables homogènes, les substitutions birationnelles sont dites *substitutions Cremona;* ce sont celles-là qui forment l'objet de la présente étude.

Nous avons défini d'une façon précise la notion du *groupe* Cremona et classé les groupes suivant l'ordre (1) maximum de leurs substitutions. Nous avons donné le tableau complet des groupes quadratiques

(1) Le mot *ordre* sert à distinguer deux choses distinctes : tantôt le nombre des substitutions d'un groupe, tantôt la dimension à laquelle entrent les variables. Les deux acceptions du mot *ordre* sont très différentes d'ailleurs et l'amphibologie n'est pas possible.

d'ordre fini. Quant aux groupes cubiques, nous n'en avons traité qu'un cas particulier, assez étendu du reste.

Dans le Mémoire actuel, après quelques généralités applicables à tous les groupes, nous avons exposé la théorie complète des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique.

Un second Mémoire traitera des groupes cubiques.

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus* (27 août 1883, 3 mars et 20 octobre 1884, 6 juillet 1885). Nous avons emprunté à l'exposé de Clebsch les notions générales sur les propriétés des substitutions Cremona, mais nous croyons que notre méthode de construction des groupes est neuve et originale.

Préliminaires et définitions.

1. Une substitution Cremona est définie par le symbole

$$S = |z_i \quad \varphi_i(z_1, z_2, z_3)| \quad (i = 1, 2, 3),$$

où $\varphi_i(z_1, z_2, z_3)$ ou, pour abréger, $\varphi_i(z)$ désigne un polynôme homogène en z_i et d'ordre n, si l'ordre S est n.

Le réseau des courbes en nombre doublement infini,

$$\varphi = \Sigma_i u_i \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \ u_i = \text{const. arbitr.}),$$

que j'appelle, pour abréger, réseau de la substitution S, aura *un* point d'intersection mobile (dépendant des u_i) et $n^2 - 1$ points d'intersection fixes (indépendants des u_i) dits *points fondamentaux* de S. Un point fondamental de S sera r^{uple}, si chaque courbe φ y a un point r^{uple}. A un point fondamental r^{uple} de S, S fait correspondre non pas un point unique, mais une courbe d'ordre r dite *courbe fondamentale de* S^{-1}. La théorie des points fondamentaux et courbes fondamentales a été donnée dans les *Leçons sur la Géométrie*, par Clebsch (p. 188 à 219 du Tome II de la traduction de A. Benoist). Nous ne pouvons que renvoyer à cet exposé pour toutes les parties non originales du présent Travail.

Le point z, de coordonnées z_i, est transformé par S en un point y $[\rho y_i = \varphi_i(z)]$, que j'appelle *point transformé* de z par S et que je désigne par le symbole $S(z)$. Soit maintenant la courbe $f(z_1, z_2, z_3)$ ou, pour abréger, $f(z) = 0$; la courbe $F(z) = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = f(\varphi) = 0$ sera dite *transformée* de f par S ou $SF(z)$; on vérifie que $F(z) = 0$ est le lieu des transformés par S^{-1} des points de $f = 0$.

2. Soient deux substitutions Cremona d'ordres n et n',

$$S = |z_i \quad \varphi_i|, \quad S' = |z_i \quad \varphi'_i| \qquad (i = 1, 2, 3);$$

posons

$$\Phi_i(z) = \varphi'_i(\varphi) = P\,\Psi_i(z) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en désignant par P, d'ordre p, le facteur commun aux Φ_i. La substitution d'ordre $nn' - p$

$$|z_i \quad \Psi_i|$$

sera, par définition, le produit $S'S$ de S' par S. Il faut d'ailleurs, bien entendu, que le réseau Ψ de $S'S$ satisfasse aux mêmes conditions que les réseaux φ et φ', c'est-à-dire ait un point d'intersection mobile, et $(nn' - p)^2 - 1$ points fondamentaux.

La convention précédente permet de définir le *groupe* Cremona d'une façon précise et identique à celle dont on définit les groupes de substitutions de toute autre nature. L'*ordre* d'un groupe est l'ordre maximum des substitutions du groupe. Ainsi un groupe quadratique sera formé de substitutions linéaires et quadratiques seulement; un groupe cubique ne contiendra que des substitutions cubiques, quadratiques et linéaires.

Voici maintenant deux théorèmes sur les relations qui existent entre les points fondamentaux de S, S′ et S′S.

3. Clebsch énonce (*Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 209) un théorème que l'on peut énoncer ainsi, avec nos notations actuelles :

Théorème auxiliaire. — *Si la transformée* Φ *d'une courbe* φ' *d'ordre* n', *par une substitution* S, *d'ordre* n, *se décompose en une courbe fixe* $P = 0$,

et une courbe $\Psi = 0$, *qui dépende des coefficients de la courbe irréductible* φ', *alors :*

1° $\varphi' = 0$ *passe* K_j *fois par chaque point fondamental* $r_j^{\text{uple}} a_j$ *de* S^{-1}, *avec l'égalité*

(1) $$\Sigma_j K_j r_j = p, \quad p = \text{ordre de P};$$

2° *Le facteur* P *est défini par l'identité*

(2) $$P = \Pi_j f_j^{K_j},$$

où f_j *est la courbe fondamentale de* S, *qui correspond au point fondamental* a_j *de* S^{-1}. *Le symbole de somme ou produit dans* (1) *ou* (2) *s'étend à tous les points fondamentaux* a_j *de* S^{-1}.

Ce théorème conduit au suivant :

Théorème. — *Si l'ordre de* S′S *est* $nn' - p$, n *et* n' *étant les ordres de* S *et* S′, *chaque point fondamental* $r^{\text{uple}} a_j$ *de* S^{-1} *est un point fondamental* K_j^{uple} *de* S, *et l'on a la relation précédente* (1)

$$\Sigma_j K_j r_j = p.$$

Il suffit de faire usage du théorème précédent et de nos conventions antérieures (**2**) pour démontrer aisément que la courbe générale

$$\varphi' = \Sigma_i u_i \varphi'_i \quad (u_i = \text{const. arbitr.})$$

du réseau S′ passe K_j fois par a_j; mais la courbe générale φ' passe t fois par un point t^{uple} fondamental de S′ : le point a_j doit donc être un point fondamental K_j^{uple} de S′, sans quoi le système doublement infini des courbes

$$\varphi' = \Sigma_i u_i \varphi'_i = 0$$

aurait trop de points d'intersection fixes pour former un réseau. Quant à la relation (1), elle est la conséquence directe du théorème auxiliaire précédent.

4. Théorème. — *Tout point fondamental de la substitution produit* S′S *est ou bien point fondamental de* S, *ou bien est transformé par* S^{-1} *d'un point fondamental de* S′.

Soit, en effet, z un point fondamental de S'S; prenons nos notations habituelles, on a

$$\Psi_i(z) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_i(z) = 0;$$

mais

$$\Phi_i(z) \equiv \varphi'(\varphi),$$

et Φ_i n'est nul que dans les deux cas suivants :

1° $\varphi_i(z) = 0$, $z =$ point fondamental de S;

2° $\rho\,\varphi_i(z) = x_i$, x étant un point fondamental de S'; donc,

$$z = S^{-1}(x).$$

Le théorème est démontré.

Les théorèmes précédents ne sont absolument vrais que lorsqu'il n'existe pas de points fondamentaux infiniment voisins.

L'application du théorème donne immédiatement la démonstration du lemme suivant, qui nous sera utile :

Lemme. — *Soient* S *une substitution Cremona*, l *et* L *deux substitutions linéaires. Posons* $T = lSL$. *Les points fondamentaux de* T *sont les transformés par* L^{-1} *des points fondamentaux de* S; *les points fondamentaux de* T^{-1} *sont les transformés par* l *des points fondamentaux de* S^{-1}.

Groupes quadratiques.

5. Voici le Tableau des trois types de groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe quadratique Cremona.

Premier type. — Il dérive des substitutions Σ (quadratique) A, B, C (linéaires) :

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_1 - z_2 \\ z_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Deuxième type. — Groupe dérivé d'une substitution

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad (\lambda, \mu = \text{const.}),$$

combinée à des substitutions S, toutes de la forme

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix},$$

où les coefficients p, P, q, Q sont tels que les groupes linéaires à deux variables

$$P \text{ dérivé des substitutions } \begin{vmatrix} z_1 & p_1 z_1 + p_3 z_3 \\ z_3 & P_1 z_1 + P_3 z_3 \end{vmatrix},$$

et

$$Q \text{ dérivé des substitutions } \begin{vmatrix} z_2 & q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ z_3 & Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \end{vmatrix}$$

soient l'un et l'autre d'ordre fini.

Troisième type. — Groupe dérivé de substitutions toutes de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \\ z_2 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)^2 \\ z_3 & R z_1 z_3 + r_{11} z_1^2 + 2 r_{12} z_1 z_2 + r_{22} z_2^2 \end{vmatrix},$$

où R est une racine de l'unité, et le groupe linéaire à deux variables dérivé des substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & q_1 z_1 + q_2 z_2 \\ z_2 & p_1 z_1 + p_2 z_2 \end{vmatrix}$$

est d'ordre fini.

6. On sait que le réseau d'une substitution quadratique est un ré-

seau de coniques à trois points fixes, formant les sommets du triangle fondamental; les lignes fondamentales sont les côtés du triangle fondamental. Une substitution quadratique sera désignée par le symbole

$$\begin{cases} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{cases},$$

ce qui signifiera que a, b, c sont les points fondamentaux de S; a', b', c' ceux de S^{-1}; au point a, S fait correspondre la droite $\overline{b'c'}$; au point a', S^{-1} fait correspondre la droite $\overline{bc}$, etc.

A l'égard des groupes ne contenant pas de substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, on a la proposition suivante :

Théorème. — *Une substitution faisant partie d'un groupe quadratique a au moins deux points fondamentaux communs avec chacune des autres substitutions du groupe.*

Soient S et S′ deux substitutions quadratiques du groupe, le produit S′S ne pourra être que linéaire ou quadratique; donc (5)

$$\Sigma_j r_j K_j \geqq 2.$$

Le réseau d'une substitution quadratique ne comportant que des points fondamentaux simples, r_j et K_j ne peuvent être que zéro ou 1. Il y a donc au moins deux termes dans la somme Σ_j, et le théorème est démontré.

Les triangles fondamentaux doivent donc avoir, pris deux à deux, deux sommets communs; cela n'est possible, comme on s'en assure aisément, que de deux façons :

1° Tous les triangles fondamentaux ont deux sommets en deux points fixes;

2° Tous les triangles fondamentaux ont leurs trois sommets coïncidant avec trois sommets d'un quadrilatère fixe que je nommerai, pour abréger, *quadrilatère générateur*.

La première hypothèse donne naissance au second type (5); la seconde hypothèse au premier type.

Construisons le groupe du premier type.

7. Lemme I. — *Les substitutions linéaires appartenant à un groupe du premier type permutent entre eux les sommets du quadrilatère générateur. Elles peuvent les permuter d'ailleurs de toutes les vingt-quatre façons possibles.*

En vertu d'un lemme précédent (4), la substitution linéaire l change les points fondamentaux de S^{-1} en les points fondamentaux de $(lS)^{-1}$; les substitutions S et lS appartenant toutes deux au groupe, les points fondamentaux coïncident tous avec des sommets du quadrilatère générateur, et le lemme est démontré.

Comme on sait d'ailleurs qu'il est toujours possible de construire une substitution linéaire changeant quatre points donnés quelconques en quatre points donnés également quelconques, la seconde partie du lemme est aussi démontrée.

Soit donc g le groupe linéaire contenu dans le groupe quadratique G du premier type, g sera isomorphe au groupe général γ entre quatre lettres.

Lemme II. — *Une substitution quadratique est complètement déterminée quand on donne : 1° ses points fondamentaux; 2° ceux de son inverse; 3° la corrélation de ces points; 4° les coordonnées d'*un seul *point quelconque du plan et celles de son transformé par la substitution.*

Soit la substitution

$$S\begin{cases} a & b & c \\ a' & b' & c', \end{cases}$$

soit $P_1 = (zbc) = 0$ l'équation de la droite $\overline{bc}$, et de même

$$P_2 = (zac), \quad P_3 = (zab).$$

Les coniques φ du réseau de S passent par les sommets du triangle $P_1P_2P_3 = 0$; donc

$$S = |\, z_i \quad u_iP_2P_3 + v_iP_3P_1 + w_iP_1P_2 \,|.$$

Cela posé, puisque le point a' correspond à la droite $P_1 = 0$, le

point b' à la droite $P_2 = 0$, etc., on a (les coordonnées de a' étant a'_i, etc.)

$$u_i = pa'_i, \quad v_i = qb'_i, \quad w_i = rc'_i,$$

p, q, r restant encore des constantes à déterminer. Soit maintenant $x(x_i)$ un point donné dans le plan, $y(y_i)$ le point $S(x)$, on a

$$\rho y_i = pa'_i P_2 P_3 + qb'_i P_3 P_1 + rc'_i P_1 P_2, \tag{1}$$

en remplaçant dans P_i les coordonnées courantes par celles de x. Les équations (1) achèvent de déterminer les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ et, par suite, l'expression algébrique de S. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Désignons par a, b, c, d les sommets du quadrilatère générateur. La substitution

$$\Sigma \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{Bmatrix}, \quad \text{avec la condition} \quad \Sigma(d) = d,$$

sera, en vertu du lemme II, parfaitement déterminée; désignons par g le groupe linéaire contenu dans G; g sera isomorphe au groupe γ entre les quatre lettres a, b, c, d. Cela posé, il vient la proposition :

Théorème. — *Le groupe* G *du premier type résulte de la combinaison de* Σ *avec le groupe linéaire* g.

Soit en effet, par exemple,

$$S \begin{Bmatrix} b & a & d \\ a & c & d \end{Bmatrix}$$

une substitution de G; je dis que $S(c) = b$. En effet, $S(c)$ est un point fondamental de S^{-2} (**4**), c'est-à-dire un des quatre points a, b, c, d; on ne peut avoir $S(c) = a$, c ou d, car si, par exemple, $S(c) = a$, c serait sur la droite $\overline{ad}$, ce que nous excluons par hypothèse (**9**); on a donc

$$S(c) = b.$$

Cela posé, prenons dans γ (voir lemme I) les substitutions

$$\lambda = (a)(bcd), \quad \lambda'^{-1} = (ab)(cd);$$

soient l et l' les substitutions de g qui correspondent à λ et λ'; je dis que la substitution $T = l\Sigma l'$ est identique à S. En vertu du lemme (**4**),

$$T\begin{cases} b & a & d \\ a & c & d \end{cases};$$

il suffit de démontrer que $T(c) = b$, pour que le lemme II donne

$$T = S$$

Or

$$T = l\Sigma l',$$

$$T(c) = l\Sigma l'(c) = l\Sigma(d) = l(d) = b, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8. Fixons de la façon suivante le système de coordonnées :

Pour le point	a.	$z_2 = z_3 = 0$,
»	b.	$z_3 = z_1 = 0$,
»	c.	$z_1 = z_2 = 0$,
»	d.	$z_1 = z_2 = z_3$.

L'application à la construction de Σ du procédé indiqué au lemme II (**7**) donne

$$\Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}$$

Reste à construire g; γ dérive des trois substitutions

$$\alpha = (ad)(bc), \quad \beta = (ab)(c)(d), \quad \gamma = (abc)(d),$$

et l'on vérifie sans peine que les substitutions A, B, C de g qui correspondent à α, β, γ ont bien la forme indiquée plus haut (**5**).

Le groupe quadratique du premier type est ainsi complètement construit.

9. Nous avons supposé que parmi les quatre points a, b, c, d on n'en trouvait pas plus de deux en ligne droite. Il est aisé de voir qu'il ne saurait y avoir trois de ces points en ligne droite.

Supposons un instant a, b, c en ligne droite; toute substitution

$$S\begin{cases} a\ b\ c \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

se réduit évidemment à une substitution linéaire, car le réseau des φ se décompose en deux droites dont une, $\overline{abc}$, est fixe. Prenons donc une des substitutions qudratiques qui pourraient exister, par exemple

$$S\begin{cases} b\ c\ d \\ a\ d\ c \end{cases};$$

soit φ une courbe du réseau S, on a (**3**)

$$S\varphi = (zbc)(zbd)\Psi;$$

la conique Ψ passe par c, d et par $S^{-1}(b)$, or b est sur la droite $\overline{ac}$ fondamentale pour S^{-1}, $S^{-1}(b) = c$; Ψ est tangent en c à une direction fixe, y a, par suite, deux points fixes infiniment voisins (Clebsch, *loc. cit.*, t. II, p. 197), mais Ψ est une courbe générale du réseau de S^2; il y aurait donc dans le groupe des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, ce qui est contraire à nos hypothèses.

On verrait plus facilement encore qu'il est absurde de supposer tous les quatre points a, b, c, d en ligne droite.

Passons maintenant à la construction du second type (5).

10. Soient a et b les deux points qui sont fondamentaux pour toutes les substitutions du groupe; ces substitutions sont de la forme

$$S\begin{cases} a\ b\ c \\ a\ b\ d \end{cases} \quad \text{ou} \quad T\begin{cases} a\ b\ e \\ b\ a\ f \end{cases}.$$

On vérifie aisément que les formes S et T sont les seules possibles; supposons en effet une substitution différente, par exemple

$$S' \begin{cases} a & b & c \\ d & a & b \end{cases},$$

et φ' une courbe de son réseau, $S\varphi' = (zac)(zab)\Psi$, Ψ étant une conique qui ne passe plus par a; Ψ est une courbe du réseau de S^2 et a ne serait plus fondamental pour S^2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lemme. — *Le produit de deux substitutions* T *et* T′ *de la forme* T *est une substitution de la forme* S.

Soient

$$T \begin{cases} a & b & e \\ b & a & f \end{cases}, \quad T' \begin{cases} a & b & e' \\ b & a & f' \end{cases},$$

et soient τ et τ' les courbes générales des réseaux de T et T′, θ et θ' celles des réseaux de T^{-1} et T'^{-1}; on a

$$T\tau' = (zae)(zbe)\zeta,$$

la conique $\zeta = 0$ passe par a, b, $T^{-1}(e')$; de même

$$T'^{-1}\theta = (zaf')(zbf')\eta,$$

la conique $\eta = 0$ passe par a, b, $T'(f')$; ζ est la courbe générale du réseau de $T'T$, η celle du réseau de $T^{-1}T'^{-1} = (T'T)^{-1}$, et les points $a, b, e'' = T^{-1}(e)$ sont les points fondamentaux de $T'T$; $a, b, f'' = T'(f')$ sont les points fondamentaux de l'inverse de $T'T$. On a ainsi, à l'ordre des points fondamentaux près,

$$T'T \begin{cases} a & b & e'' \\ a & b & f'' \end{cases};$$

il reste à faire voir que l'ordre dans lequel sont écrits les points a, b, e'', f'' est le véritable, c'est-à-dire que $T'T$ transforme toute droite issue de a ou b en une autre droite issue également de a ou b. Soit,

pour le démontrer, un point quelconque x du plan, $x' = T^{-1}T'^{-1}(x)$, $e''' = T'^{-1}(e)$, on aura

$$T'T(zax) = (zae')(zbe)(zbe''')(zax');$$

d'où, abstraction faite des courbes fixes indépendantes de x,

$$T'T(zax) = (zax'),$$

et, de même,

$$T'T(zbx) = (zbx').$$

Le lemme est ainsi démontré dans toutes ses parties,

Théorème. — *Le groupe* G *du second type résulte d'une seule substitution* T, *combinée à des substitutions de la forme* S.

Soit T′ en effet une seconde substitution de la forme T; le lemme précédent donne

$$T'T^{-1} = S, \quad T' = ST. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

11. Passons à la construction effective des substitutions S et T. Fixons le système des coordonnées, de façon à avoir

$$a(z_1 = z_3 = 0),$$
$$b(z_2 = z_3 = 0).$$

Soit maintenant

$$T\begin{cases} a & b & c \\ b & a & d \end{cases};$$

achevons de déterminer les coordonnées par les conditions

$$d(z_1 = z_2 = z_3), \quad c(z_1 = z_2 = 0),$$

et soit $c' = T^{-1}(c)$; il vient

$$T(zac) = (zac)(zbc'), \quad (zac) = z_1,$$
$$T(zbc) = (zbc)(zac'), \quad (zbc) = z_2,$$
$$T(zab) = (zac)(zbc), \quad (zab) = z_3.$$

Posons

$$(zbc') = p_2 z_2 + \lambda z_3, \quad (zac') = p_1 z_1 + \mu z_3.$$

Il vient, pour T,

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p_2 z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(p_1 z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix};$$

remarquons qu'à la ligne fondamentale $(zab) = z_3 = 0$ de T correspond le point $d(d_1 = d_2 = d_3)$, il viendra

$$p_2 = p_1 = 1;$$

d'où, enfin,

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Les constantes λ et μ restent arbitraires, et en effet T n'est pas déterminé complètement par ses points fondamentaux, et ceux de T^{-1} (lemme II, **7**). En réalité, λ et μ dépendent des coefficients des S, substitutions qu'il nous reste à construire.

Soient

$$S \begin{cases} a & b & e \\ a & b & f \end{cases},$$

r le point $r_1 = r_2 = 0$, $r' = S^{-1}(r)$, on aura

$$S(zar) = (zbe)(zar') \quad (zar) = z_1,$$
$$S(zbr) = (zae)(zbr') \quad (zbr) = z_2,$$
$$S(zab) = (zae)(zbe) \quad (zab) = z_3.$$

Posons

$$Q = (zbe) = Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \quad (zae) = P_1 z_1 + P_3 z_3 = P,$$
$$q = (zbr') = q_2 z_2 + q_3 z_3 \quad (zar') = p_1 z_1 + p_3 z_3 = p;$$

il viendra

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix}.$$

12. Désignons par α et β les deux substitutions linéaires à deux variables

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & p_1 z_1 + p_3 z_3 \\ z_3 & P_1 z_1 + P_3 z_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} z_2 & q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ z_3 & Q_2 z_2 + Q_3 z_3 \end{vmatrix};$$

appelons

$\alpha(U)$ la transformée par α d'une forme binaire U en z_1, z_3,
$\beta(V)$ » β » V en z_2, z_3;

on peut écrire

$$p = \alpha(z_1), \quad P = \alpha(z_3), \quad q = \beta(z_2), \quad Q = \beta(z_3),$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \alpha(z_1)\beta(z_3) \\ z_2 & \beta(z_2)\alpha(z_3) \\ z_3 & \alpha(z_3)\beta(z_3) \end{vmatrix} = (\alpha, \beta),$$

et de même

$$S' = (\alpha', \beta').$$

On démontre par un calcul aisé qu'après suppression du facteur PQ on a

$$S'S = (\alpha'\alpha, \beta'\beta),$$

$\alpha'\alpha$ étant le produit des deux substitutions linéaires α et α', etc.

Il reste à démontrer que le groupe linéaire A (dérivé des α) et le groupe linéaire B (dérivé des β) sont l'un et l'autre d'ordre fini.

Soient la substitution S du groupe G, n son ordre

$$S^n = 1 = | z_i \quad R z_i | = (\alpha^n, \beta^n);$$

donc

$$\alpha^n \left(\frac{z_1}{z_3}\right) = \frac{z_1}{z_3}, \quad \beta^n \left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \frac{z_2}{z_3}, \quad \alpha^n = \beta^n = 1, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons ainsi construit le groupe du second type (5) d'une façon complète.

15. Nous allons construire les groupes quadratiques contenant des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins.

Généralisons d'abord, pour une telle substitution S, les notations précédentes (**6**). La notation

$$S \left\{ \begin{array}{l} a\ \overleftarrow{a'}\ b, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

indiquera que deux points fondamentaux se sont confondus en a tout en restant situés sur la droite $\overline{aa'}$, en d'autres termes que la conique générale du réseau φ de S touche en a la droite fixe $\overline{aa'}$.

L'inverse S^{-1} de S possède les mêmes propriétés que S; pour le démontrer, plaçons le point a en $z_1 = z_3 = 0$, b en $z_2 = z_3 = 0$. Il viendra, en donnant $z_1 = 0$ pour équation à la droite $\overline{aa'}$,

$$S = | z_i \quad p_i z_1 z_3 + q_i z_3^2 + r_i z_1 z_2 |$$

d'où

$$S^{-1} \left| \begin{array}{ll} z_1 & P^2 \\ z_2 & RQ \\ z_3 & PQ \end{array} \right|, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} (pqz) = R, \\ (zqr) = P, \\ (pzr) = Q. \end{array}$$

Si donc on désigne par p le point de coordonnées p_i, ..., on voit que la conique générale du réseau ϑ de S^{-1} touche au point r la droite fixe $\overline{pr}$, et passe de plus par le point fixe q. On vérifie qu'à tous les points de $\overline{pr}$, S^{-1} fait correspondre le point unique b, ..., et l'on peut écrire, avec les conventions de **6**,

$$S \left\{ \begin{array}{l} a\ \overleftarrow{a'}\ b \\ \overleftarrow{r\ p}\ q \end{array} \right. .$$

Remarque. — La jacobienne du réseau φ est $z_3^2 z_1 (pqr) = 0$, ou simplement $z_3^2 z_1 = 0$, puisque les trois points p, q, r ne sont pas en ligne droite, sans quoi le réseau φ se réduirait à un faisceau.

Une substitution quadratique peut avoir ses trois points fondamentaux confondus en un point a ($z_1 = z_2 = 0$, par exemple). La conique générale φ du réseau de S est osculatrice en a à une conique fixe $f = z_2 z_3 + K z_1^2 = 0$, par exemple, et l'on a

$$S = | z_i \quad p_i f + q_i z_1 z_2 + r_i z_2^2 |,$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} z_1 & QR \\ z_2 & R^2 \\ z_3 & RP - KQ^2 \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} (zqr) &= P, \\ (pzr) &= Q, \\ (pqz) &= R; \end{aligned}$$

la conique générale θ du réseau de S^{-1} est osculatrice à la conique fixe $RP - KQ^2 = 0$, au point fixe $R = Q = 0$, c'est-à-dire p.

La jacobienne du réseau φ est $z_2^3 = 0$.

Avant de construire les groupes quadratiques contenant des substitutions à points fondamentaux infiniment voisins, il reste à démontrer, sur la composition de pareilles substitutions, une proposition importante.

Soient

S et S′ deux substitutions du groupe G;
φ et φ' les coniques générales de leurs réseaux;
Ψ celle du réseau de S′S.

Il viendra (**2**)

$$\Phi = \varphi'(\varphi) = S\varphi' = P\Psi;$$

soit ϖ un facteur irréductible de P, la proposition annoncée est la suivante :

Lemme. — *La courbe* $\varpi = 0$ *fait partie de la jacobienne du réseau de* S.

En effet, la courbe $\Phi = 0$ est le lieu des transformés par S^{-1} (**1**) des points de φ; s'il se détache de Φ une courbe fixe et indécomposable $\varpi = 0$, cela veut dire que φ' passe par un point fixe x tel que S^{-1} fait correspondre à x tous les points de $\varpi = 0$ ou inversement qu'à

tous les points de $\varpi = 0$, S fait correspondre le point unique x. Donc

$$(1) \qquad S = |z_i \quad x_i M + \varpi N_i|,$$

M et N_i sont des formes d'ordre 2 et $2 - \lambda$, si λ est l'ordre de ϖ. Sur la formule (1), on vérifie aisément que $\varpi = 0$ fait partie de la jacobienne de φ (réseau de S).

Cela posé, nous pouvons aborder la construction des groupes quadratiques à points fondamentaux infiniment voisins.

14. Théorème. — *Si un groupe quadratique* G *d'ordre fini contient une substitution quadratique à trois points fondamentaux infiniment voisins,* G *appartient au troisième type.*

Soit S une pareille substitution; on aura (**15**)

$$S = |z_i \quad p_i f + q_i z_1 z_2 + r_i z_2^2|.$$

Prenons une substitution *quelconque* S′ de G, soit φ' la conique générale du réseau de S′. On aura (**2**)

$$\varphi'(\varphi) = S\varphi' = P\Psi = z_2^2 \Psi,$$

en vertu du lemme (**15**), puisque $z_2^4 = 0$ est la jacobienne du réseau de S.

Mais, en posant $\varphi'_i(z) = \dfrac{\partial \varphi'(z)}{\partial z_i}$,

$$S\varphi' = \varphi'(\varphi) = f^2 \varphi'(p) + 2 z_1 z_2 f \Sigma_i q_i \varphi'_i(p) + z_2^2(\ldots) = z_2^2 \Psi,$$

d'où

$$\varphi'(p) = 0, \quad \Sigma_i q_i \varphi'_i(p) = 0;$$

φ' touche en p la droite $\overline{pq}$, donc (**6**) et (**15**)

$$S' \left\{ \begin{array}{l} p \underset{\leftarrow}{\ } q \ \cdots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right. .$$

Rien n'empêche de supposer que S′ est S elle-même, alors $p_1 = p_2 = 0$,

$q_2 = 0$, puisque la droite $\overline{pq}$ a pour équation $z_2 = 0$; donc la conique générale du réseau de toute substitution contenue dans G touche, en $z_1 = z_2 = 0$, la droite fixe $z_2 = 0$.

Soit maintenant une substitution T de G, t le troisième point fondamental intersection de la droite $\xi_3 = 0$ avec la droite $\xi_1 = 0$, joignant le point t au point fondamental $z_1 = z_2 = 0$. Il viendra

$$T = |\, z_i \quad \alpha_i z_2 \xi_3 + \beta_i \xi_1^2 + \gamma_i z_2 \xi_1 \,|, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Un calcul aisé montre que la conique générale θ du réseau de T^{-1} touche en α la droite fixe $\overline{\alpha\gamma}$. Donc, en vertu de ce qui précède,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0$$

et

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & \xi_1(\beta_1 \xi_1 + \gamma_1 z_2) \\ z_2 & \beta_2 \xi_1^2 \\ z_3 & \alpha_3 z_2 \xi_3 + \xi_1(\beta_3 \xi_1 + \gamma_3 z_2) \end{vmatrix},$$

ce qui revient à la forme donnée pour le troisième type (5),

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \\ z_2 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)^2 \\ z_3 & K z_2 z_3 + R \end{vmatrix},$$

R = forme quadratique binaire en z_1, z_2 à coefficients arbitraires.

Désignons par σ la substitution linéaire binaire

$$\sigma = |\, z_1 \quad z_2 \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 \quad p_1 z_1 + p_2 z_2 \,|$$

et par $\sigma(u)$ la transformée par σ d'une forme binaire u en z_1 et z_2; on peut écrire

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \sigma(z_2)\sigma(z_1) \\ z_2 & \sigma(z_2)^2 \\ z_3 & K z_2 z_3 + R \end{vmatrix} = (\sigma, K).$$

Voilà donc la forme générale des substitutions de G; on démontre

que le produit de deux substitutions de cette forme a la même forme : il suffit d'un calcul très aisé pour le faire voir et pour démontrer que, si

$$S = (\sigma, K), \quad S' = (\sigma', K'),$$

pareillement

$$S'S = (\sigma'\sigma, KK').$$

On démontrera, comme plus haut (**12**), que le groupe Γ, dérivé des substitutions linéaires σ, est d'ordre fini. Il suffira, pour achever d'établir le théorème, de faire voir que les K sont racines de l'unité.

Soient

$$S = (\sigma, K), \quad \sigma^n = 1, \quad S^{\lambda n} = 1\,;$$

prenons la substitution

$$S^n = (1, K^n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_1 \\ z_2 & z_2^2 \\ z_3 & K^n z_2 z_3 + R' \end{vmatrix}.$$

Si $K^n \neq 1$, formons

$$S^{\lambda n} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_1 \\ z_2 & z_2^2 \\ z_3 & K^{\lambda n} z_2 z_3 + R' \sum_{j=0}^{j=\lambda-1} K^{nj} \end{vmatrix}$$

$$= 1 = |z_i \quad z_2 z_i|\,;$$

d'où la condition unique

$$K^{\lambda n} = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

15. Prenons maintenant un groupe G, dépourvu de substitutions à trois points fondamentaux confondus. Soit S une substitution à deux points fondamentaux confondus ou infiniment voisins, il viendra (**15**)

$$S\left\{\begin{matrix} \overleftarrow{a\ a'}\ b \\ \overleftarrow{r\ p}\ q \end{matrix}\right. = |z_i \quad p_i z_1 z_3 + q_i z_3^2 + r_i z_1 z_2|, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Soit S′ (ayant φ' pour courbe générale de son réseau) une quelconque des substitutions de G; on a

$$S\varphi' = P\Psi, \quad P = z_3^2, \text{ ou } z_1 z_3, \text{ ou } z_1^2,$$

d'après le lemme (**15**) et la nature de la jacobienne des φ.

Or

$$(1) \quad \begin{cases} S\varphi' = \varphi'(\varphi) = z_1^2 z_2^2 \varphi'(r) + 2 z_1 z_2 z_3^2 \Sigma_i r_i \varphi'_i(q) \\ \qquad + 2 z_1^2 z_2 z_3 \Sigma_i r_i \varphi'_i(p) + z_3^4 \varphi'(q) \\ \qquad + 2 z_1 z_3^3 \Sigma_i p_i \varphi'_i(q) + z_1^2 z_3^2 \varphi'(p), \\ \text{où} \\ \varphi'_i(z) = \dfrac{\partial \varphi'(z)}{\partial z_i}. \end{cases}$$

Cela posé :

I. Si $P = z_3^2$, $\varphi'(r) = 0$, $\Sigma_i r_i \varphi'_i(p) = 0$, la conique φ' touche en r la droite $\overline{pr}$, et l'on peut écrire

$$S' \begin{cases} r \; p \; \dots \\ \overset{\leftarrow}{} \\ \dots\dots\dots \end{cases}.$$

Mais on peut prendre pour S′ la substitution S elle-même, car S′ est quelconque dans le groupe; donc $r = a$, et l'on a

$$S' \begin{cases} \underset{\leftarrow}{a \; a'} \; \dots \\ \underset{\leftarrow}{a \; a'} \; \dots \end{cases}.$$

II. Si $P = z_1 z_3$, $\varphi'(r) = 0$, $\varphi'(q) = 0$, S′ a pour points fondamentaux r et q; comme on peut prendre, pour S′, S elle-même, il vient

$$r = a, \quad p = b, \quad \text{ou} \quad r = b, \quad p = a;$$

d'où

$$S' \begin{cases} a \; b \; \dots \\ b \; a \; \dots \end{cases} \quad \text{ou} \quad S' \begin{cases} a \; b \; \dots \\ a \; b \; \dots \end{cases}.$$

III. Si $P = z_1^2$, $\Sigma_i r_i \varphi'_i(q) = 0$, $\varphi'(q) = 0$, $\Sigma_i p_i \varphi'_i(q) = 0$, d'où

$$(pqr) = 0,$$

hypothèse inadmissible : on ne peut donc faire $P = z_1^2$.

En résumé, un groupe G contenant une substitution de la forme

$$S \left\{ \begin{array}{l} \underleftarrow{a\; a'}\; b \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

appartient à l'une des trois espèces suivantes :

Première espèce. — G contient des substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\begin{array}{lll} \underleftarrow{a\; a'}\; b, & \underleftarrow{a\; b}\; b', & a\; b\; c, \\ \underleftarrow{a\; a''}\; b, & \underleftarrow{a\; b}\; b'', & a\; b\; c'. \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Deuxième espèce. — G contient les substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\underleftarrow{a\; a'}\; b, \quad \underleftarrow{a\; a'}\; c \quad \underleftarrow{a\; a'}\; d, \quad \ldots,$$

Troisième espèce. — G contient les substitutions dont les points fondamentaux sont

$$\underleftarrow{a\; a'}\; b, \quad \underleftarrow{a\; a'}\; c \quad \text{et} \quad a\; b\; c.$$

Le groupe G de la deuxième espèce est le même que le groupe précédemment construit (**14**).

16. Si G est de la première espèce, on voit que toutes les substitutions S ont deux points fondamentaux en deux points fixes a et b du plan, et que toute substitution du groupe est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a\; b\; \ldots \\ a\; b\; \ldots \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a\; b\; \ldots \\ b\; a\; \ldots \end{array} \right. .$$

Nous sommes ramené aux substitutions du second type (**5** et **10** ou **11**), sauf, bien entendu, qu'un troisième point fondamental peut s'approcher infiniment de a ou de b, ce que nous n'avons pas considéré (**10** et **11**); mais la forme algébrique des substitutions et les propriétés

qui s'en déduisent ne changent pas. Ainsi, par exemple, la substitution

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \\ z_2 & (q_2 z_2 + q_3 z_3)(P_1 z_1 + P_3 z_3) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_3 z_3)(Q_2 z_2 + Q_3 z_3) \end{vmatrix}$$

a pour troisième point fondamental le point r,

$$P_1 z_1 + P_3 z_3 = Q_2 z_2 + Q_3 z_3 = 0.$$

Le point r se confondra avec $a(z_1 = z_3 = 0)$, par exemple si $Q_2 = 0$, mais cette hypothèse ne modifiera pas les propriétés de S, des groupes linéaires A et B (**11**); le groupe G est donc le groupe déjà construit du second type (**5**), (**10**) et (**11**).

17. La considération de la troisième espèce (**15**) ne fournit aucun groupe nouveau. Le groupe G de troisième espèce ne diffère en effet du groupe de deuxième espèce que par la présence d'une substitution

$$\Sigma \begin{cases} a \;\; b \;\; c \\ \dots\dots \end{cases};$$

il suffira de démontrer que Σ ne saurait exister dans le groupe G de troisième espèce.

Pour un pareil groupe, on démontre aisément, comme plus haut [(**7**) et (**8**)] :

1° Que le groupe linéaire g, contenu dans G, se combine pour former G avec les deux substitutions

$$T \begin{cases} \underleftarrow{aa}'b \\ \underleftarrow{aa}'b \end{cases}, \quad T(c) = 1, \quad T^2 = 1,$$

$$\Sigma \begin{cases} abc \\ abc \end{cases}, \quad \Sigma(zaa') = (zaa')(zbc);$$

2° Qu'en prenant des coordonnées, telles que

$$(zab) = z_1 = 0, \quad (zbc) = z_3 = 0,$$
$$(zac) = z_2 = 0, \quad (zaa') = z_1 + z_2 = 0,$$

on a

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_1+z_2) \\ z_2 & -z_1 z_2 \\ z_3 & (z_1+z_2)z_3 \end{vmatrix}, \quad \Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, formons $T\Sigma$, il viendra

$$T\Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_3(z_1+z_2) \\ z_2 & -z_3 z_1 \\ z_3 & z_1(z_1+z_2) \end{vmatrix};$$

le point $z_3 = z_1 + z_2 = 0$, qui n'est ni a, ni b, ni c, est fondamental pour $T\Sigma$, ce qui est absurde, puisque G est de la troisième espèce; donc Σ ne saurait exister dans G. C. Q. F. D.

Les divers groupes quadratiques d'ordre fini sont simplement ceux qui ont été donnés au Tableau précédent (5).

Sur les équations du cinquième degré;

PAR M. PAUL GORDAN.

Soit

(I) $$f = a$$

une équation du cinquième degré, ayant pour racines

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_4;$$

le discriminant Δ est le carré du produit D des différences $x_\mu - x_\nu$,

(II) $$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix}, \quad \Delta = D^2.$$

Les fonctions rationnelles d'une racine x_ν peuvent être réduites, au moyen de l'équation (I), à la forme

(III) $$\varphi_{\rho,\nu} = a_{\rho^0} + a_{\rho^1} x_\nu + a_{\rho^2} x_\nu^2 + a_{\rho^3} x_\nu^3 + a_{\rho^4} x_\nu^4.$$

Cinq de ces fonctions,

$$\varphi_{0,\nu},\ \varphi_{1,\nu},\ \varphi_{2,\nu},\ \varphi_{3,\nu},\ \varphi_{4,\nu},$$

linéairement indépendantes l'une de l'autre, forment un système par lequel on peut exprimer les autres. Elles donnent lieu à trois déterminants, c'est-à-dire celui des a_{ik}, celui des φ_{ik} et celui des $\sum_{\nu=0}^{\nu=4} \varphi_{i\nu}\varphi_{k\nu}$;

je les appelle A, U, V; ils sont liés l'un à l'autre par les relations

(IV) $$U = DA, \quad V = U^2 = \Delta A^2.$$

Choisissons six fonctions spéciales de nos φ, c'est-à-dire

(V) $$\begin{cases} 1, \quad p_\nu = x_\nu - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu, \quad y_\nu = x_\nu^2 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^2 + \rho_1 p_\nu, \\ q_\nu = x_\nu^3 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^3 + \rho_2 p_\nu, \quad r_\nu = x_\nu^4 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^4 + \rho_3 p_\nu, \quad z_\nu = q_\nu + \rho_4 r_\nu, \end{cases}$$

satisfaisant aux relations

(VI) $$\Sigma p_\nu = 0, \quad \Sigma y_\nu = 0, \quad \Sigma q_\nu = 0, \quad \Sigma r_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu = 0,$$

et qui soient soumises à celles-ci :

(VII) $$\Sigma y_\nu^2 = 0, \quad \Sigma q_\nu y_\nu = 0, \quad \Sigma r_\nu y_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu^2 = 0.$$

La première signifie une relation quadratique pour ρ_1, la deuxième et la troisième sont linéaires pour ρ_2 et ρ_3, et la dernière est quadratique pour ρ_4. Son discriminant $H = \Sigma q_\nu r_\nu \Sigma q_\nu r_\nu - \Sigma q_\nu^2 \Sigma r_\nu^2$ ayant évidemment la même valeur que le déterminant V des cinq premières des fonctions V, et le déterminant A de ces mêmes fonctions équivalant à l'unité, nous avons, d'après (IV),

$$H = \Delta.$$

Les formules (VII) se réunissent ainsi :

(VII^a) $$\Sigma(y_\nu + \lambda z_\nu)^2 = 0,$$

formule qui existe pour chaque valeur de λ, et qui signifie que les quantités $y_\nu + \lambda z_\nu$ sont les racines d'une équation principale (d'après Klein).

En laissant figurer λ dans l'équation cubique de Bring,

$$\Sigma(y_\nu + \lambda z_\nu)^3 = 0,$$

nous avons en $y_\nu + \lambda z_\nu$ la racine d'une équation

$$(y_\nu + \lambda z_\nu)^5 + a(y_\nu + \lambda z_\nu) + b = 0,$$

dont M. Hermite a fait usage pour résoudre l'équation générale du cinquième degré.

Comme M. Kronecker (*voir* le LIXe vol. du *Journal de Borchardt*) l'a

montré, on peut transformer l'équation générale du cinquième degré au moyen de racines carrées dans une équation avec un seul paramètre.

Pour trouver une telle équation, introduisons les fonctions

$$v_\nu = y_\nu + \lambda_1 z_\nu, \quad \bar{v}_\nu = y_\nu + \lambda_2 z_\nu,$$

pour lesquelles

(VIII[a]) $$\Sigma y_\nu v_\nu \bar{v}_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu v_\nu \bar{v}_\nu = 0;$$

donc aussi

(VIII[b]) $$\Sigma v_\nu^2 \bar{v}_\nu = 0, \quad \Sigma \bar{v}_\nu^2 v_\nu = 0.$$

Les formules (VIII[a]) donnent, pour λ_1, λ_2, les équations

$$\Sigma y_\nu^3 + (\lambda_1 + \lambda_2)\Sigma y_\nu^2 z_\nu + \lambda_1\lambda_2 \Sigma y_\nu z_\nu^2 = 0,$$
$$\Sigma y_\nu^2 z_\nu + (\lambda_1 + \lambda_2)\Sigma y_\nu z_\nu^2 + \lambda_1\lambda_2 \Sigma z_\nu^3 \quad = 0,$$

ce qui nous montre que λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation quadratique

$$\begin{vmatrix} \Sigma y^3 & \Sigma y^2 z & \Sigma y z^2 \\ \Sigma y^2 z & \Sigma y^2 z^2 & \Sigma z^3 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et voilà donc le déterminant de Hesse pour l'équation de Bring.

Nous pouvons donner aux formules (VI), (VII[a]) et (VIII[a]) la forme

(IX) $$\Sigma v_\nu = \Sigma_v^2 = \Sigma \bar{v}_\nu = \Sigma v_\nu \bar{v}_\nu = \Sigma \bar{v}_\nu^2 = \Sigma v_\nu^2 \bar{v}_\nu = \Sigma v_\nu \bar{v}_\nu^2 = 0;$$

les deux premières formules nous donnent v_ν, racine de l'équation principale

(X) $$v^5 + 5av^2 + 5bv + c = 0.$$

Ses coefficients ont, d'après les formules de Newton, les valeurs

$$-3a = \Sigma v_\nu^3, \quad -4b = \Sigma v_\nu^4, \quad -5c = \Sigma v_\nu^5.$$

Chaque fonction rationnelle de x_ν est aussi rationnelle en v_ν, et, pour cette raison, linéaire dans les cinq quantités

$$g_{\rho,\nu} = \frac{-v_\nu^\rho}{v_\nu^4 + 2av_\nu + b} = \frac{-v_\nu^{\rho+1}}{3av_\nu^2 + 4bv_\nu + c} \quad (\text{pour } \rho : 0, 1, 2, 3, 4).$$

Celles de ces φ_ν pour lesquelles $\Sigma\varphi_\nu = 0$ sont linéaires en g_0, g_1, g_2, g_3. D'après la formule (IX), $\bar{v}_\nu$, $v_\nu\bar{v}_\nu$, $v_\nu^2\bar{v}_\nu$, $\bar{v}_\nu^2$, $v_\nu\bar{v}_\nu^2$ y sont compris ainsi : v_ν est linéaire en g_0, g_1, et $\bar{v}_\nu^2$ est linéaire en g_0, g_1, g_2. Il en résulte la relation

$$(g_0 + \alpha g_1)^2 = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2$$

ou

$$\text{(XI)} \qquad v_\nu(v_\nu + \alpha)^2 = (c_0 + c_1 v_\nu + c_2 v_\nu^2)(3av_\nu^2 + 4bv_\nu + c).$$

Vu l'irréductibilité de la formule (X), équation du cinquième degré, et en conséquence de celle-ci du quatrième degré, la dernière est identique pour tout v. En égalant les coefficients des puissances de v_ν, on trouve

$$c_0 = 0, \quad 3ac_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad b = \frac{3a}{2}\alpha, \quad c = 3a\alpha^2.$$

Nous substituons ces valeurs de b et c dans la formule (X), et remplaçons v_ν par la quantité

$$w_\nu = -\frac{2\alpha}{v_\nu},$$

ce qui nous donne l'équation

$$w_\nu^5 - 5w_\nu^4 + \frac{20}{3}w_\nu^3 = \frac{32\alpha^3}{3a},$$

qui n'a qu'un seul paramètre, et qui, par la substitution

$$w_\nu = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_\nu,$$

se transforme dans celle de Brioschi

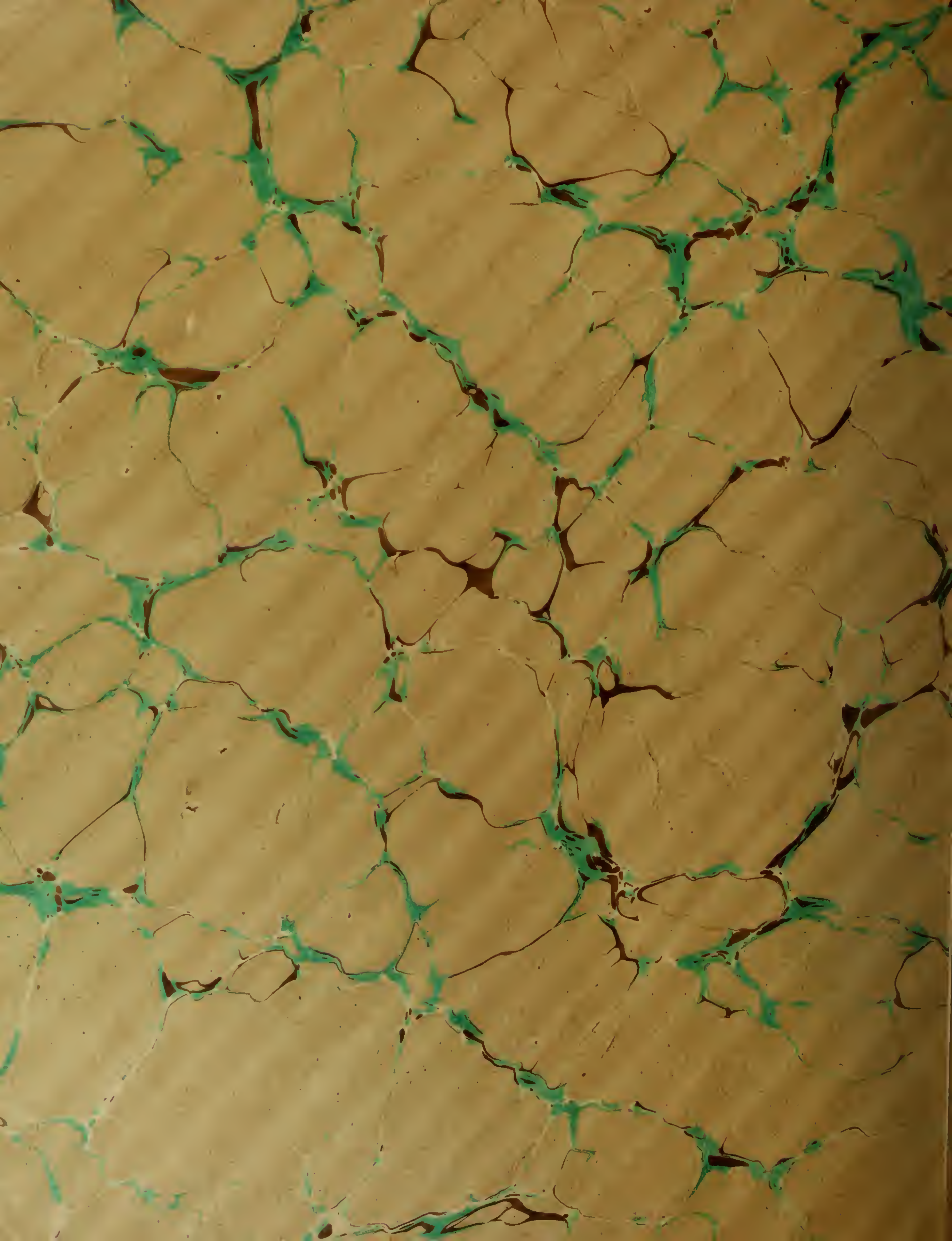
$$u^5 - 10u^3 + 45u = \frac{24}{a}\sqrt{3}(4\alpha^3 - 1).$$

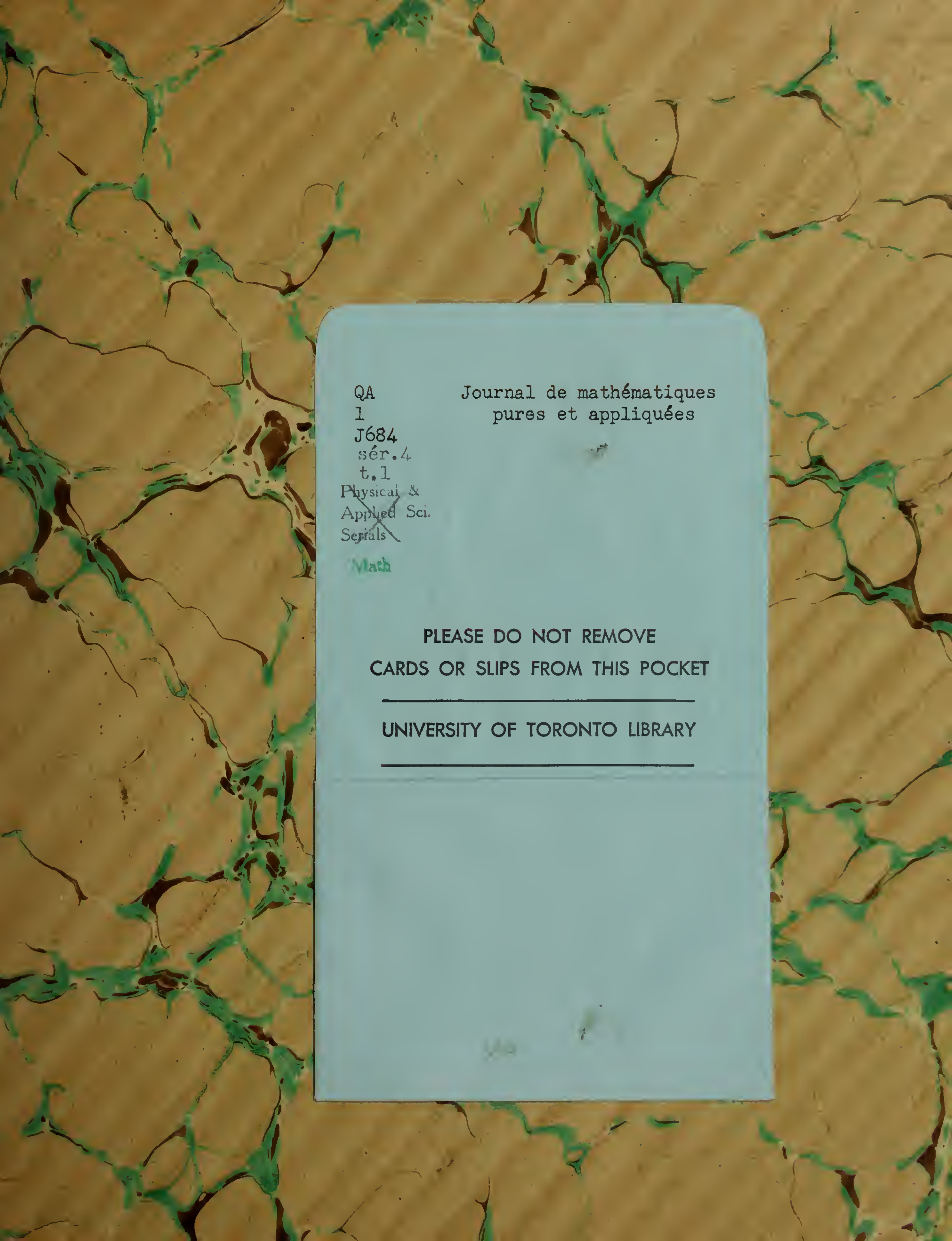
TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME I.

FIN DU TOME I DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

10363 PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.





QA
1
J684
sér.4
t.1
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

